MA3705 Algoritmos Combinatoriales
Profesor: José Soto
Auxiliares: Antonia Labarca - Víctor Sáez

Auxiliar 1: Grafos

1. Definiciones

Notamos que un multigrafo sin aristas paralelas ni loops es un grafo simple. Cuando escribamos G es un grafo, damos a entender que G es grafo simple.

Sea ahora $G = (V, E)$ un multigrafo. Para alivianar notación, si e es una arista con extremos u y v, anotaremos $e = uv$ (este igual es un abuso de notación). Notemos que en un multigrafo es posible que $e = uv$, $f = uv$ pero $e \neq f$.

1. Informalmente un **paseo** (walk) W de un vértice a a un vértice b es una secuencia de **aristas** que conectan a con b. Formalmente, $W = e_1e_2 \dots e_k$ es un paseo de a a b si existen una secuencia de vértices $v_0v_1v_2 \dots v_k$ tal que $v_0 = a, v_k = b$, $e_i = v_{i-1}v_i$, para todo $i \in [k]$. Notamos que si especificamos los extremos (a y b), la secuencia de vértices es única. En un grafo simple la secuencia de vértices define completamente al paseo, pero en un multigrafo, esto no es así. Llamamos a k el **largo** de W. Notamos que hay paseos de largo 0 de cualquier vértice a sí mismo y hay paseos de largo 1 de a a b si y solo si a y b son vecinos (o si $a = b$ y $\{a\}$ es un loop)
2. Un paseo de a a b es abierto si $a \neq b$. Si $a = b$ decimos que el paseo es cerrado.
3. Un **sendero** (trail) S es un paseo con todas sus aristas distintas. Si S es un sendero, esribimos $E(S)$ para denotar el conjunto de sus aristas.
4. Un **camino** P es un paseo que no repite vértices.
5. Un **ciclo** C es un **sendero** cerrado que no repite vértices, excepto por el par $v_0 = v_k$. En un grafo simple, todo ciclo tiene largo al menos 3. En un multigrafo pueden existir ciclos de largo 1 (loops), y ciclos de largo 2 (un par de aristas paralelas)

En lo que sigue G es un grafo simple.

P1. Demostrar que el número de vértices de grado impar de G, es par.

P2. Demostrar que si G tiene un paseo de u a v, entonces tiene un camino de u a v.

P3. Sea $\sim_G$ la relación en $V(G)$ siguiente: $u \sim_G v$ si y solo si existe un paseo de u a v en G. Demostrar que $\sim_G$ es de equivalencia.

P4. Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

a) Sean u, v vértices distintos de un grafo. Si el grafo tiene un paseo W de u a v y un paseo W' de v a u, entonces tiene un ciclo que pasa por u y v.

b) Si G es un grafo sin ciclos, pero con al menos una arista, entonces G tiene al menos 2 vértices de grado 1

c) Si existe un sendero cerrado que pasa por un vértice u entonces existe un ciclo que pasa por u

d) Si existe un sendero cerrado que pasa por dos vértices distintos u y v entonces existe un ciclo que pasa por u y v

e) Si existen senderos S y T con $E(S) = E(T)$ entonces $S = T$ o bien S es el reverso de T, obtenido al invertir el orden de la secuencia

P5. Sean C y D ciclos. Demostrar que si $E(C) \neq E(D)$, y $e \in E(C) \cap E(D)$ entonces existe un ciclo C' con $E(C') \subseteq E(C) \cup E(D) - e$. En palabras, dado una arista en la intersección de dos ciclos, existe un ciclo en la unión, que evita a esta arista.