P1. En Economía se dice que un agente, con función de utilidad U, frente a una v.a X, con media finita es:
Adverso al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) > \mathbb{E}(U(X))$
Favorable al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) < \mathbb{E}(U(X))$
Neutro al Riesgo ssi $U(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(U(X))$
Su dinero para invertir cumple que $X \sim Unif(0,1)$ y usted es un inversioniste que solo invierte en un negocio cuando este es arriesgado.
Si tiene 3 opciones de negocios, con funciones de utilidad dadas por:

a) $U_1(t) = t^2$
b) $U_2(t) = ln(t)$
c) $U_3(t) = a + bt$ (Propuesto, pues es neutro)

En que negocios invertiría? Justifique con cálculos su elección En la a)

Linealidad

$$E(5X) = 5E(X) \qquad E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

a)

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{1} dx = \frac{1}{2}$$

$$U(E(X)) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$E(U(X)) = \int_0^1 U(x) \cdot 1 \, dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{4} \Rightarrow E(U) > U(E) \qquad F.R$$

b)

$$U(E(X)) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) > -\ln(e) = -1 = E(U(X))$$

$$E(U(X)) = \int_0^1 \ln(x) \, dx = x\ln(x) - x \Big|_0^1 = -1 \qquad A.R$$

P2. Los gastos mensuales en la entrega de un producto que sigue la variable aleatoria X, con fgm dada por $\boxed{\varphi_X(t) = e^{3(e^t-1)}}$, viene dados por $G(X) = X^2 + X - 1$. Calcular la esperanza de los gastos mensuales.

Única

$\varphi_X^{(n)}(0) = E(X^n)$

$E(G(X)) = E(X^2) + E(X) - \cancel{E}(1)$

$\downarrow$

-1

$\varphi_X'(t) = \varphi_X(t) \cdot (3(e^t - 1))' = \varphi_X(t) \cdot 3 \cdot e^t$

$\varphi_X'(0) = 1 \cdot 3 \cdot e^0 = 3 = E(x)$

$\varphi_X''(t) = \varphi_X'(t) \cdot 3e^t + \varphi_X(t) \cdot 3e^t$

$= \varphi_X(t) \left[(3e^t)^2 + 3e^t\right]$

$\varphi_X''(0) = 3^2 + 3 = 12 = E(x^2)$

$\Rightarrow E(G(x)) = 12 + 3 - 1 = 14$

P3. Recuerde que la función $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^t dt$.

Sea $z > 0$ y X v.a con distribución $\Gamma(1, z)$, es decir, con función de densidad: $f_X(x) = \frac{e^{-x} x^{z-1} 1_{x>0}}{\Gamma(z)}$.

GAMMA

a) Encuentre $E(X^n)$ para $n \geq 1$ y deduzca la $Var(X)$. Recuerde que: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

b) Calcule la función generadora de momentos $E(e^{-sX})$ para $s \geq 0$.

c) Pruebe usando la función generadora de momentos que si las variables X e Y son independientes, $X \sim Gamma(1, \alpha)$ e $Y \sim Gamma(1, \beta)$, con α y β positivos, entonces $X + Y \sim Gamma(1, \gamma)$ y encuentre γ.

$$E[X^N] = \int_0^\infty \frac{x^N e^{-x} x^{z-1}}{\Gamma(z)} dx = \frac{\Gamma(z+N)}{\Gamma(z)} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^{z+N-1} e^{-x} dx}{\Gamma(z+N)}}_{1}$$

$$= \boxed{(z+N-1)\cdots\cdots z}$$

$$Var = E(X^2) - [E(X)]^2 = (z+1)z - (z)^2 = z^2 + z - z^2 = z$$

Reemplazando para n=1 y n=2 en la anterior.

b) $$\int_0^\infty \frac{e^{-sx} \cdot e^{-x} \cdot x^{z-1} dx}{\Gamma(z)} = \int_0^\infty \frac{e^{-x(s+1)} x^{z-1}}{\Gamma(z)} dx$$

$$= \frac{1}{(s+1)^z} \underbrace{\int_0^\infty \frac{e^{-x(s+1)} (x(s+1))^{z-1}}{\Gamma(z)} dx \, (s+1)}_{1}$$

Revisar haciendo cambio de variable t=x(s+1)

$$\varphi(s) = \frac{1}{(s+1)^z}$$

$$\hat{\varphi}_Y(s) = \frac{1}{(s+1)^\beta} \Leftrightarrow Y \sim \Gamma(1, \beta)$$

c) $$\varphi_{X+Y}(s) = E(e^{-s(X+Y)}) \overset{X \perp Y}{=} E(e^{-sX}) \cdot E(e^{-sY})$$

$$\Rightarrow \varphi_{X+Y}(s) = E\left(\underbrace{e^{-s(X+Y)}}_{e^{-sX}\cdot e^{-sY}}\right) \overset{X \perp Y}{=} E(e^{-sX})E(e^{-sY})$$

$$= \frac{1}{(s+1)^{\alpha}} \cdot \frac{1}{(s+1)^{\beta}}$$

$$= \frac{1}{(s+1)^{\alpha+\beta}}$$

$X+Y \sim \text{Gamma}(1, \alpha+\beta)$