

P1. Sea X v.a. con una función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

a) Encuentre el valor de c

b) Calcule $P(X \geq \frac{1}{2})$

c) Calcule $P(X = \frac{1}{2})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

a)

Para encontrar c vamos a usar que integra 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-1}^1 cx^2 dx \stackrel{x^2 \text{ es par}}{=} 2 \int_0^1 cx^2 dx$$

$$= \frac{2c}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2c}{3}$$

Imponer que $\frac{2c}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{3}{2}}$

b) Recordemos

$$P(X \in (a, b]) = \int_a^b f_X(t) dt$$

$$P(X \geq \frac{1}{2}) = P(X > \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3}{2} x^2 dx = \frac{x^3}{2} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \boxed{\frac{7}{16}}$$

c) $P(X = \frac{1}{2}) = 0$

Cuando x
es v.a. continua

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \int_0^b e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^b = 1 - e^{-b} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 1$$

P2. Sea $\lambda > 0$, considere X v.a. absolutamente continua, con densidad $f_X(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}$ para $x \in \mathbb{R}$.

a) Pruebe que $|X| \sim \text{Exponencial}(\lambda)$.

b) Sea $Y = \text{signo}(X)$. Pruebe que $Y \sim \text{Bernoulli}(1/2)$.

$$F_X(t) = F_Y(t) \Leftrightarrow X \sim Y$$

$$\text{Pdx} \quad P(|X| \leq t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$f_{|X|}(x) = ?$$

Desarrollo $P(|X| \leq t)$ con $t < 0$ es 0 ✓

$$\text{Si } t \geq 0 \quad P(|X| \leq t) = P(-t \leq X \leq t)$$

$$P(|X| \leq t) = \int_{-t}^t \underbrace{\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}}_{h(x)=h(-x)} dx$$

$$\text{Aridad} = \int_0^t \lambda e^{-\lambda|x|} dx \stackrel{x \geq 0}{=} \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= 1 - e^{-\lambda t}$$

Calcular, pero basta con justificar por fcn

de una $\text{Exp}(\lambda)$

$$P(|X| \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad P(Y=1) &= P(\text{sign}(X)=1) \quad \rightarrow \text{Da lo mismo} \\
 &= P(X > 0) = P(X \geq 0) \\
 &= \int_0^{\infty} f_X(t) dt \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda t} dt \quad \rightarrow \text{Pues } t \geq 0 \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt \quad \text{Cambio} \\
 &= \frac{1}{2} \quad \text{Pues lo es un conocido}
 \end{aligned}$$

Caso $P(Y=-1)$ Analogo $\Rightarrow P(Y \in \{-1, 1\}) = 0$
 Si lo hacen recurrentes hacer
 Cambio de Variable

P3. Tras 11 semanas de conectarse a las clases de MA3403, ahora disfruta de sobremanera ver al Rocky aparecer de sorpresa en las clases. Por lo que en sus tiempos libres vuelve a ver las clases grabadas para poder recrear ese momento. Sin embargo, el semestre se le vino encima y ya casi no tiene tanto tiempo para sentarse a observar. Para no perder su costumbre, de todos modos decide mirar las clases hasta que aparezca por primera vez y luego volver a matraquear. Tras algunas semanas, se da cuenta que, en promedio, cada 20 minutos aparece el rocky, ¿Cuál es la probabilidad de que usted se sienta y antes de 15 minutos vea al Rocky?

$$X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

$$\lambda = \frac{1}{20}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Exponencial
Spide
Viernes
o lunes

$$f_x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{20} e^{-\frac{t}{20}} & t \geq 0 \end{cases}$$

Dr memoria

$$R = \int_0^{15} \frac{1}{20} e^{-\frac{t}{20}} dt = 1 - e^{-\frac{15}{20}} = 1 - e^{-\frac{3}{4}} \approx 0.52$$

P4. Suponga que tiene una variable aleatoria X uniforme en $[0, 2\pi]$. Calcule entonces la densidad de $|\sin(X)|$.

$$f_{|\sin(X)|}(t) = \frac{d}{dt} P(|\sin(X)| \leq t)$$

$$P(|\sin(X)| \leq t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

$$f_{|\sin(X)|}(t) = \frac{d}{dt} P(\dots) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

Caso $t \in [0, 1]$

$$P(|\sin(X)| \leq t) = P(X \in A)$$

$$\stackrel{\text{I def}}{=} P(X \in A_1) + P(X \in A_2) + P(X \in A_3)$$



$$= P(0 \leq x \leq \arcsin(t)) + P(\pi - \arcsin(t) \leq x \leq \pi + \arcsin(t)) + P(2\pi - \arcsin(t) \leq x \leq 2\pi)$$

$$U[a, b]: f_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & [a, b] \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$U(0, 2\pi): f_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & [0, 2\pi] \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$A_1 = \int_0^{\arcsin(t)} \frac{1}{2\pi} dx = \frac{\arcsin(t)}{2\pi}$$

$$A_2 = \int_{\pi - \arcsin(t)}^{\pi + \arcsin(t)} \frac{1}{2\pi} dx = \frac{2 \cdot \arcsin(t)}{2 \cdot \pi}$$

$$A_3 = \int_{2\pi - \arcsin(t)}^{2\pi} \frac{1}{2\pi} dx = \frac{\arcsin(t)}{2\pi}$$

$$P(|\sin(x)| \leq t) = \frac{2 \arcsin(t)}{\pi}$$

$$f_{|\sin(x)|}(t) = \frac{2}{\pi \sqrt{1-t^2}}$$

$$f_{|\sin(x)|}(t) = \frac{2}{\pi \sqrt{1-t^2}} \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$$

Revisa que integro 1