

P1. Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias geométricas **independientes** con $X_i \sim \text{geom}(p_i)$.
 Demuestre que $X = \min(X_1, \dots, X_n)$ cumple con ser geométrica y encuentre su parámetro.

$$P(Y = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

$$Y \sim \text{Geom}(p)$$

$$P(Y \geq k) = (1-p)^{k-1}$$

$$\text{supp}(Y) = \{1, 2, \dots\}$$

$$P(\min\{X_1, \dots, X_n\} = k)$$

z

No Apañá

$$P(z \geq k) = P(\forall i \in \{1, \dots, n\}, X_i \geq k)$$

$$\text{Independencia} \leftarrow P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \geq k\}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^n P(X_i \geq k)$$

Ans

$$= \prod_{i=1}^n (1-p_i)^{k-1}$$

$$= [(1-p_1)(1-p_2) \dots (1-p_n)]^{k-1}$$

$$= \left[1 - \underbrace{\left(1 - \prod_{i=1}^n (1-p_i)\right)}_M\right]^{k-1}$$

M

$$\rightarrow P(z = k) = (1-M)^{k-1} \cdot M \quad z \sim \text{Geom}(M)$$

$$\Rightarrow P(t \geq K) = (1-M) \Rightarrow 0 \leq$$

$$M \in [0, 1] \quad 1 \geq (1-P_i) \Rightarrow 1 \geq \prod_{i=1}^N (1-P_i)$$

$$\Rightarrow M \geq 0 \quad \sim \quad M \leq 1 \quad (\text{Proposición})$$

P2. Sea $p \in (0, 1)$. Sean $(Y_i)_{i \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas ellas con la misma ley $Y_i \sim \text{Ber}(p)$. Sea $r \geq 2$ y defina:

$$V_r = \inf\{n \geq 1 : \sum_{i=1}^n Y_i = r\}$$

a) Pruebe que

$$[V_r = n] \iff \left[\sum_{i=1}^{n-1} Y_i = r-1, Y_n = 1 \right]$$

b) Calcule $\mathbb{P}(V_r = n) \quad \forall n \geq r$.

$$V_r = n \iff \inf \{N \geq 1 : \sum_{i=1}^N Y_i = r\} \quad Y_i \in \{0, 1\}$$

$$\iff \{N \geq 1 : \sum_{i=1}^N Y_i = r, \sum_{i=1}^{N-1} Y_i \neq r\}$$

$$\iff \{N \geq 1 : \sum_{i=1}^N Y_i = r, \sum_{i=1}^{N-1} Y_i < r\} \cup \{ \sum_{i=1}^{N-1} Y_i > r \}$$

$$\stackrel{\text{es imposible}}{\iff} \{N \geq 1 : \sum_{i=1}^N Y_i = r, \sum_{i=1}^{N-1} Y_i \leq r-1\}$$

Imposible ($\varnothing$) por
por $\sum_{i=1}^N Y_i \geq \sum_{i=1}^{N-1} Y_i$

$$\iff \{N \geq 1 : \sum_{i=1}^{N-1} Y_i + Y_N = r, \sum_{i=1}^{N-1} Y_i \leq r-1\}$$

$$\iff \{N \geq 1 : \sum_{i=1}^{N-1} Y_i + 1 = r, Y_N = 1, \sum_{i=1}^{N-1} Y_i \leq r-1\} \cup \{Y_N = 0\}$$

(I) (II)

$$(I) \cap (II) = (I)$$

$$\iff \{N \geq 1 : \sum_{i=1}^{N-1} Y_i = r-1, Y_N = 1\}$$

Verificar
que es $\varnothing$

$$b) \mathbb{P}(V_r = n) \stackrel{?}{=} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i = r-1, Y_n = 1\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i = r-1\right) \cdot \mathbb{P}(Y_n = 1)$$

Recurrence

$$X_i \sim \text{bernoulli}(P)$$

$$\sum_{i=1}^N X_i \sim \text{binomial}(N, P)$$

$$= \binom{N-1}{r-1} \cdot P^{r-1} (1-P)^{N-1-(r-1)} \cdot P$$

$$= \binom{N-1}{r-1} P^r (1-P)^{N-r}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^N X_i = k\right) = \binom{N}{k} P^k (1-P)^{N-k}$$

P3. Sea $Y \sim \text{geom}(p)$, es decir, $P(Y = i) = (1 - p)^{i-1}p$. Sea $a \in R$ y la "matriz aleatoria":

$$A = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^n (Y - i) + a & aY \\ 1 & Y \end{pmatrix}$$

Calcule la probabilidad de que A sea invertible. (Hint: Recuerde que una matriz es invertible si y solo si su determinante es no nulo).

$$|A| = Y \prod_{i=1}^n (Y - i) + aY - aY$$

$$|A| = Y \cdot \prod_{i=1}^n (Y - i) \quad (Y \geq 1)$$

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\prod_{i=1}^n (Y - i)}_P \neq 0$$

$$P = \{Y \geq N+1\}$$

$$\subseteq \{Y \geq N+1\}^c \subseteq P^c$$

$$\text{Sea } \omega \text{ tal que } Y(\omega) < N+1 \Rightarrow Y(\omega) \leq N$$

$$\Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, N\} \text{ tal que } Y(\omega) = i$$

$$\Rightarrow Y(\omega) - i = 0, \quad \prod_{i=1}^n (Y(\omega) - i) = 0$$

$$\Rightarrow \omega \notin P \Rightarrow \{Y \geq N+1\}^c \subseteq P^c$$

$$\supseteq \text{Sea } \omega \text{ tal que } Y(\omega) \geq N+1$$

$$\Rightarrow y(\omega) - i \geq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

$$\prod_{i=1}^N (y(\omega) - i) > 0 \Rightarrow \omega \in \mathcal{P}$$

$$\mathcal{P} = \{y \geq N+1\}$$

$$P(A \text{ se invertible}) = P(\mathcal{P}) = P(\{y \geq N+1\})$$

$$\stackrel{\text{P.T.}}{=} (1-p)^N \quad \blacksquare$$

P4. [Repaso C1] Un jugador de emboque Amateur va a participar en un Torneo de Emboque Amateur del barrio. Para ello compró con anticipación 5 emboques aparentemente idénticos y los usó por varios meses hasta que escogió aquél con mejores resultados. Así con el emboque "regalón" la probabilidad de acierto de cualquier lanzamiento es $3/4$, en cambio para los restantes cuatro emboques esta probabilidad es sólo $1/3$. El día del campeonato vió con estupor que la noche anterior había guardado el emboque regalón junto con los otros emboques, por lo que no era capaz de distinguirlos. Desesperado y atrasado, escoge uno de ellos al azar y se va al campeonato.

a) Si para ganar el campeonato necesita hacer al menos 8 aciertos de 10, ¿cuál es la probabilidad de que gane el campeonato?

b) Si gana obteniendo 9 aciertos de 10, ¿cuál es la probabilidad de que haya realmente escogido su emboque regalón?

Tiene 5 emboques idénticos $P(\text{regalón}) = \frac{1}{5}$

$P(\text{Acierto} | \text{Regalón}) = 3/4$ $P(\text{Cualquiera}) = \frac{4}{5}$

$P(\text{Aciertos} | \text{Cualquiera}) = 1/3$

9) $P(6) = P(\text{Tenen 8 aciertos de 10})$

$\stackrel{\text{Add}}{=} P(6 | \text{regalón}) \cdot P(\text{regalón}) +$

$P(6 | \text{Cualquiera}) \cdot P(\text{Cualquiera})$

Aparte

$P(6 | \text{regalón}) = \text{Esto es binomial con } n=10$

Esto cambia en Cualquiera $\leftarrow P = \frac{3}{4}$ $\sim K = \{8, 9 \text{ o } 10\}$

$$= \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} P^k \cdot (1-P)^{10-k}, \text{ con } P = \frac{3}{4}$$

$$P(6) = \left(\sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{10-k} \right) \cdot \frac{1}{5} +$$

$$\sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{10-k} \cdot \frac{4}{5}$$

b) Si gana obteniendo 9 aciertos de 10, ¿cuál es la probabilidad de que haya realmente escogido su emboque regalón?

$$P(R | \text{obtener 9 de 10}) \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{P(\text{obtener 9 de 10} | R) \cdot P(R)}{P(\text{obtener 9 de 10})}$$

$$P(\text{obtener 9/10} | R) = \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^1$$

$$P(\text{obtener 9/10} | C) = \binom{10}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^9 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^1$$

$$P(\text{obtener 9/10} | R) = \frac{\cancel{\binom{10}{9}} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)}{\cancel{\binom{10}{9}} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^9 \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{3}\right)^9 \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{4}{5} \right]} \xrightarrow{\text{Regalón}}$$