P1. Se sabe que el evento en que un teléfono celular de la marca A se rompe cuando se cae al suelo tienen probabilidad p, independiente de las otras caídas. Para un celular de la marca B lo mismo, pero con probabilidad q de romperse, donde $q > p$. Usted se compra un celular y escoge al azar la marca y después de k caídas aun funciona. → Condiciona

a) Sea Z una variable aleatoria geométrica de parámetro p. Muestre que $\mathbb{P}(Z > k) = (1-p)^k$, para todo $k \in N$.

b) Cual es la probabilidad de que haya escogido la marca A? Qué pasa cuando k es muy grande?
Hint: Defina una variable aleatoria que indique el número de la caída en que se rompe el celular.

c) Cuál es la probabilidad de que su celular vuelva a sobrevivir otras k caídas? → Va a tener prob (P)

d) Suponga que su celular efectivamente es de la marca A. Suponga además que la cantidad de caídas que ocurren mensualmente es una variable aleatoria Y con distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$. Calcule la probabilidad de que su celular sobreviva un mes.
Hint: Suponga que el número decaídas en que el celular se rompe es independiente de Y

$$P(A) = \frac{1}{2} = P(B)$$

a) $P(X=K) = (1-P)^{K-1} \cdot P$

$P(X>K) \longrightarrow$ Opción 1 $\quad (1-P)^K \cdot 1$

(Solo se sabe que falló K veces)

Opción 2 $\quad P(X \leq K) = \sum_{j=1}^{K} P(X=j)$

$$= \sum_{j=1}^{K} P(1-P)^{j-1} = P \sum_{j=0}^{K-1} (1-P)^j$$

$$= \cancel{P}\, \underbrace{\left(1-(1-P)^K\right)}_{\cancel{1-(1-P)}} = 1-(1-P)^K$$

$$\Rightarrow P(X>K) = 1 - P(X \leq K) = (1-P)^K$$

b) $P(A \mid \text{Sobrevivio a } K \text{ caidas}) = ?$

Z: # De caidas en las que se rompe el celular

Z: # De caidas en las ...

$P(A \mid Z > K) = ?$

Idea usar bayes

Conocemos $P(A)$ ✓
$P(Z>K)$ luego A parte a)
$P(Z>K \mid A)$ ✓

$$P(A \mid Z>K) \overset{\text{bayes}}{=} \frac{P(Z>K \mid A) \cdot P(A)}{P(Z>K)}$$

Sobrevivir k intentos dado que es de A

Analizandolo $P(Z=K \mid A) \sim Geom(p)$

Por parte a) $\Rightarrow P(Z>K \mid A) = (1-p)^K$

Analogamente $P(Z>K \mid B) = (1-q)^K$

Como conocemos $P(Z>K)$ al condicionarla

Podemos usar Probabilidades Totales

$$P(Z>K) = P(Z>K \mid A)P(A) + P(Z>K \mid B)P(B)$$
$$= \frac{(1-p)^K + (1-q)^K}{2}$$

Reemplazemos $P(A \mid Z>K) = \dfrac{(1-p)^K}{(1-p)^K + (1-q)^K}$

$\boxed{1-q < 1-p}$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^K}$$

1-P Tiende a 0

$\Rightarrow P(A \mid Z > K) \longrightarrow 1$

Definicion (Cuando $B \subseteq A$ $P(A|B)$)

c) $P(Z > 2K \mid Z > K) \stackrel{\text{Definicion}}{=} \dfrac{P(Z > 2K, Z > K)}{P(Z > K)}$

$$= \frac{P(Z > 2K)}{P(Z > K)}$$

Pues la formula de b) era $\forall K$

$$= \frac{(1-p)^{2K} + (1-q)^{2K}}{(1-p)^{K} + (1-q)^{K}}$$

d) $P(Z > \#$ de caidas mensual$) = ?$

$P(Z > Y)$ $\qquad Y \sim Poisson(\lambda)$

$Z \sim Geom(P)$

<u>Consejo</u> Si tienen 2 variables condicionan

$P(Z > K)$ ✓

$$P(Z > Y) \underset{\text{Totales}}{=} \sum_{K=0}^{\infty} P(Z > Y \mid Y = K) \cdot P(Y = K)$$

$$= \sum^{\infty} \overbrace{P(Z > K)}^{\text{Lo conocemos}} \cdot \overbrace{P(Y = K)}^{\text{También}}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \underbrace{P(Z>k)}_{(1-p)^k} \cdot \underbrace{P(Y=k)}_{e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}}$$

$$= \sum_{k\geq 0} (1-p)^k \; e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \qquad \underbrace{\sum \frac{x^k}{k!} = e^x}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k\geq 0} \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!}$$

$$P(Z>Y) = e^{-\lambda} \, e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}$$

P2. Consideremos lanzamientos independientes de una moneda y encontremos la distribución de cuando ocurre la primera vez que sale un sello y luego una cara de manera consecutiva. Es decir, tenemos $p \in (0,1)$ y $(X_j)_{j\geq 1}$ sucesión de v.a.'s i.i.d. con $X_j \sim Bernoulli(p)$ para todo $j \in N$. Además, consideremos la siguiente v.a.

$$W := \text{í}nf\{j \in \mathbb{N} : X_j = 0, X_{j+1} = 1\}$$ = Primer j con X_j sello, X_{j+1} cara

a) Pruebe que

$$\mathbb{P}(W = k) = p(1-p)^k + p\mathbb{P}(W = k-1) \qquad \forall k > 1$$

b) Muestre por inducción que para todo $k \geq 1$

$$\mathbb{P}(W = k) = \sum_{i=1}^{k} p^i (1-p)^{k+1-i}$$

~~Concluya una expresión cerrada para la probabilidad de $\mathbb{P}(W = k)$~~

a) $(\cancel{X_0}, X_1, \ldots, X_{k-1}, 0, 1)$ que $\forall j \in \{0, \ldots, k-1\}$ $X_j = 0 \Rightarrow X_{j+1} = 0$

$W = K$ (?)

$$P(W=K) = P(W=K \mid X_0=0)\,P(X_0=0)$$
$$P(W=K \mid X_0=1)\,P(X_0=1)$$
$$= P(W=K \mid X_0=0)\,(1-P)$$
$$+ P(W=K \mid X_0=1)\;P$$
$$= P(1-P)^K + P\,P(W=K-1)$$

b) Hacer Caso Base (Pueden Hacerlo)

Si se cumple para K probar para K+1

$$P(W=K+1) \overset{\text{Por a)}}{=} P(1-P)^{K+1} + P\,P(W=K)$$

$$\overset{\text{Hipótesis Ind}}{=} P(1-P)^{K+1} + \cancel{P}\sum_{i=1}^{K} P^{i+1}(1-P)^{K+\cancel{1}-i}$$ $K+2-(i+1)$

$$\overset{\text{Prop sumatoria}}{=} P(1-P)^{K+1} + \sum^{K+1} P^i (1-P)^{K+2-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} p^{i}(1-p)^{k+2-i} \qquad \blacksquare$$

P3. Un cultivo de bacterias de un cierto tipo puede proliferar o bien extinguirse, lo que ocurre con probabilidad p y probabilidad $1-p$, respectivamente. Para realizar un estudio, usted genera n de estos cultivos de manera independiente.

a) Indique la función p_X de la variable X correspondiente al numero de cultivos que proliferan.

b) Debido a un corte de luz, el sistema de refrigeración de los cultivos deja de funcionar por unas horas, lo cual significa que cada cultivo que prolifero inicialmente se mantendrá vivo o se extinguirá con probabilidad q y $1-q$ respectivamente, independiente del resto. ¿Cual es la distribución de la variable aleatoria Y correspondiente a los cultivos que quedan vivos?

Prolifera prob (p)

Extingue prob (1-p)

Hay N cultivos independientes

$$X_i : \text{Cultivo i-simo} = \begin{cases} 1 & \text{prolifera} \\ 0 & \text{Extingue} \end{cases}$$

$$X_i \sim Ber(p)$$

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i \quad , \quad A = \{(x_1, \dots, x_N) \in \{0,1\}^N \mid \sum_{i=1}^{N} x_i = K\}$$

$$P(X=K) = \sum_{(x_1,\dots,x_N)\in A} P(X_1 = x_1, \dots\dots, X_N = x_N)$$

Nota: $|A| = \binom{N}{K}$ $\binom{N}{K}$ → Elementos; K → Los x_i son 1

Como X_i son independientes

$$= \sum_{(x_1,\dots,x_N)\in A} P(X_1=x_1)\cdot P(X_2=x_2)\cdot\ldots\cdot P(X_N=x_N)$$

$$= \sum_{(x_1,\dots,x_N)\in A} p^{x_1}(1-p)^{1-x_1}\cdot p^{x_2}(1-p)^{1-x_2}\cdots p^{x_N}(1-p)^{1-x_N}$$

$$= \sum p^{\sum_{i=1}^{N} x_i}\cdot(1-p)^{N-\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

$(x_1,\dots,x_N)\in A$

$$= \sum_{(x_1,\dots,x_N)\in A} p^K (1-p)^{N-K} = p^K (1-p)^{N-K} \sum_{(x_1,\dots,x_N)\in A} 1$$

$$= \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K} \sim \mathrm{Bino}(N,p)$$

Hay que saber cuantos sobrevivieron

b) $$P(Y=K) \underset{\text{Totales}}{=} \sum_{i=0}^{N} P(Y=K|X=i)\,P(X=i)$$

$$= \sum_{i=K}^{N} \underbrace{P(Y=K|X=i)}_{\mathrm{Bino}(i,q)} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i}$$

$$= \sum_{i=K}^{N} \binom{i}{K} q^K (1-q)^{i-K} \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i}$$

$$= \sum_{i=K}^{N} \frac{\cancel{i!}}{K!\,(i-K)!}\, q^K p^i (1-q)^{i-K} \frac{N!}{\cancel{i!}\,(N-i)!} (1-p)^{N-i}$$

$$= \frac{N!}{K!\,(N-K)!}\, q^K \cdot \sum_{i=K}^{N} \binom{N-K}{i-K} p^i (1-q)^{i-K} (1-p)^{N-i}$$

$$= \binom{N}{K} q^K \cdot \sum_{i=0}^{N-K} \binom{N-K}{i} p^{i+K} (1-q)^i (1-p)^{N-i-K}$$

$$= \binom{N}{K} (pq)^K \sum_{i=0}^{N-K} \binom{N-K}{i} \left(p(1-q)\right)^i (1-p)^{(N-K)-i}$$

$$= \binom{N}{K} (pq)^K \left[p(\cancel{1}-q) + 1-\cancel{p} \right]^{N-K}$$

$$= \binom{N}{K} (px)^K (1-px)^{N-K} \sim Bin(px)$$

$P(Z=K \mid A)$ = Romperse en la caida K dado que es de la marca A

$\Rightarrow$ K-1 caidas en que no se rompe y en la K se rompe

Como cada caida es independiente, esto es

$(1-p)^{K-1} \cdot p$ (independiente $\Rightarrow$ multiplicar los casos)

$P(W=K) \sim Geom(p)$