P1. La cuarta parte de una población se vacuna para prevenir una enfermedad contagiosa. Durante la epidemia observamos que hay, entre los enfermos, un vacunado por cada cuatro no vacunados. Además, observamos que, entre los vacunados, uno de doce está enfermo. ¿Cuál es la probabilidad de contagiarse para un individuo no vacunado?

$$P(V) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(NV) = \frac{3}{4}$$

$$P(V|E) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(NV|E) = \frac{4}{5}$$

$$P(E|V) = \frac{1}{12} \Rightarrow P(S|V) = \frac{11}{12}$$

$$P(E|NV) = ?$$

Como conocemos la probabilidad al revés y las otras, idea= usar bayes

$$P(E|NV) \overset{\text{bayes}}{=} \frac{P(NV|E) \cdot P(E)}{P(NV)} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{4}} \cdot P(E) = \frac{16}{15} \cdot P(E)$$

$$p = \frac{16}{15} P(E) \overset{\text{Totales}}{=} \frac{16}{15}\left[P(E|V) \cdot P(V) + P(E|NV) P(NV)\right]$$

$$= \frac{16}{15}\left[\frac{1}{12} \frac{1}{4} + p \cdot \frac{3}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 15p = \frac{1}{3} + 12p \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{9}}$$

P2. Un laboratorio que esta desarrollando la vacuna para el COVID-19 tiene dos máquinas A y B. El 54 % de las vacunas producidas son hechas por la máquina A y el resto por la máquina B. No todas las vacunas producidas son efectivas. La proporción de vacunas efectivas hechas por A es 0,8 y por B es 0,5.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al aplicar una vacuna esta sea efectiva?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que una vacuna no hizo efecto, proceda de la máquina A?

$P(A) = \frac{54}{100} \Rightarrow P(B) = \frac{46}{100}$

$P(E|A) = 0.8 \Rightarrow P(NE|A) = 0.2$ $\qquad P(E|B) = 0.5 \Rightarrow P(NE|B) = 0.5$

$P(E) = ?$

$P(E) \underset{\text{Totales}}{=} P(E|A)P(A) + P(E|B) \cdot P(B)$

$= \frac{8}{10} \cdot \frac{54}{100} + \frac{5}{10} \cdot \frac{46}{100} = \frac{216+115}{500} = \boxed{\frac{331}{500}}$

($\frac{216}{500}$, $\frac{115}{500}$)

b) $P(A|NE) \overset{\text{bayes}}{=} \frac{P(NE|A) \cdot P(A)}{P(NE)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{54}{100}}{1 - P(E)}$

$= \frac{27}{250(1-P(E))} = \frac{27}{250\left(\frac{500-331}{500}\right)} = \boxed{\frac{54}{169}}$

P3. Usted tiene un grupo de 10 amigas, 4 son mentirosas y 6 son sinceras (no se sabe quién es mentirosa o sincera). Usted tiene que responder una pregunta, para esto tiene la opción de pedirle ayuda a solo una de sus amigas y sabe que la probabilidad de que una de sus amigas sepa la respuesta es $\frac{3}{4}$, si no sabe la respuesta, la probabilidad de que le diga la correcta es $\frac{1}{2}$ y si sabe, su amiga con probabilidad 1 hará honra a su nombre de mentirosa o sincera.

Si usted tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de saber la correcta y $\frac{1}{5}$ de achuntarle al no saberla, le conviene pedir ayuda a alguna de sus amigas?

Indicación: Parta por calcular para sus amigas la P(Saber la respuesta|Es sincera), que puede concluir al respecto de los eventos "Saber la respuesta y "Ser sincera?

$$P(M) = \frac{2}{5} \quad \text{y} \quad P(S) = \frac{3}{5}$$

$$P(\text{Sabe}) = \frac{3}{4} \qquad P(\text{N sabe}) = \frac{1}{4}$$

$$P(C \mid \text{No sabe}) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(I \mid \text{No Sabe}) = \frac{1}{2}$$

$$P(C \mid S \text{ y Sabe}) = 1 = P(I \mid M \text{ y Sabe})$$

$$P(I \mid S \text{ y Sabe}) = 0 = P(C \mid M \text{ y Sabe})$$

$$\boxed{P(\text{Ser Sincera y Saber}) = P(\text{Ser Sincera}) \cdot P(\text{Saber})}$$

$$P(\text{Saber} \mid \text{Sincera}) \overset{\downarrow}{=} \frac{P(\text{Saber y Ser Sincera})}{P(\text{Sincera})} \overset{\text{Independencia}}{=} P(\text{Saber})$$

$$P(C) \overset{\substack{\text{Totales}\\ \downarrow}}{=} \overset{1}{P(C \mid \cancel{\text{Sincera}} \text{ y Sepa})}\, P(\text{Sincera y Sepa}) +$$
$$\overset{0}{P(C \mid \cancel{\text{Mentirosa}} \text{ y Sepa})}\, P(M \text{ y Sepa}) +$$
$$\overset{\frac{1}{2}}{P(C \mid \cancel{\text{Sincera}} \text{ y No Saber})}\, P(S \text{ y no sepa}) +$$
$$\overset{\frac{1}{2}}{P(C \mid \cancel{M} \text{ y No Sepa})}\, P(M \text{ y No Sabe})$$

$$= 1 \cdot P(S) \cdot P(\text{Saber}) + 0 + \frac{1}{2} \cdot P(S) \cdot P(\text{No saber})$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot P(M) \cdot P(\text{No Saber})$$

$$= 1 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{9}{20} + \frac{3}{40} + \frac{2}{40} = \frac{23}{40}$$

$$P(\text{Saber}) = \frac{1}{2} \qquad P(\text{No saber}) = \frac{1}{2}$$

$$P(C \mid \text{No saber}) = \frac{1}{5} \quad , \quad P(C \mid \text{Saber}) = 1$$

$$P(C) \stackrel{\text{Todas}}{=} P(C \mid \text{No saber}) \cdot P(\text{No saber}) + P(C \mid \text{Saber}) \cdot P(S)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{3}{5} / \cdot \frac{8}{8}$$

$$\boxed{P(C) = \frac{24}{40}}$$

Conviene no pedir ayuda

P4. En una prueba de selección múltiple les alumnes pueden contestar sabiendo la respuesta o tratando de adivinar. Supongamos que un alumne conoce la respuesta con una probabilidad p, de manera que si no sabe intentará adivinar, lo que ocurre con probabilidad $(1-p)$. Si el estudiante está adivinando la respuesta, tiene una probabilidad $\dfrac{1}{m}$ de tenerla correcta, donde m es el número de alternativas.

a) ¿Cuál es la probabilidad que un alumne haya sabido la respuesta de una pregunta que contestó correctamente?.

b) La profesora del curso decide contactarle, pues quiere que la probabilidad de que un alumne que contesto correcto haya sabido la respuesta, sea mayor que $4/5$, asumiendo que $p = \frac{1}{2}$, calcule el número mínimo de alternativas para que se cumpla esto.