# Auxiliar #2

**P1.** Se tienen $n \in \mathbb{N}$ urnas diferentes. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar en ellas $m \in \mathbb{N}$ $(m > n)$ bolas idénticas:

*a*) sin restricción alguna en cuanto al número de bolas en cada urna;

*b*) si no puede haber ninguna urna vacía;

*c*) si quedan exactamente $r$ $(0 < r \leq n)$ urnas vacías?

n urnas □

m > n bolitas o

(a) Sin restricciones

* las bolitas siempre entran a una urna

EJ: 5 bolitas y 3 urnas


Notemos que si disponemos bolitas + urnas en una línea encontrar lo que buscamos es lo mismo que ver como podemos disponer las urnas en esta "línea"

→ Una bolita entra a la caja si está a la izquierda de ella

en el ejemplo: 5 bolitas y 2 urnas = 7 espacios

en 7 espacios → 2 urnas

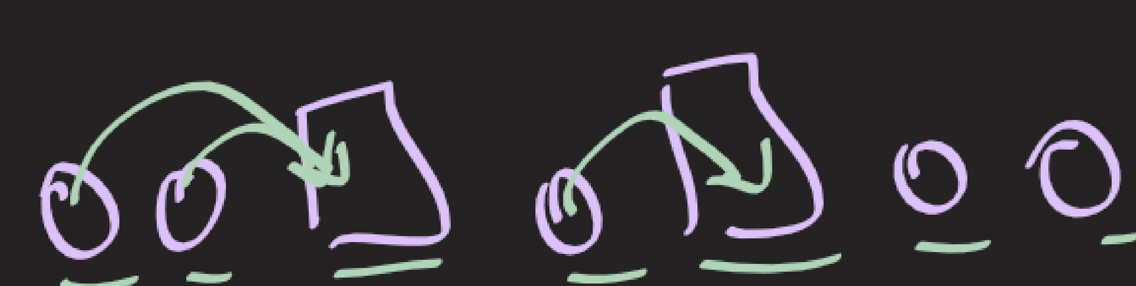
$\binom{7}{2}$ → formas para colocar bolitas

n urnas, m bolitas } $n+m-1$ espacios

↑ urna final (fija)

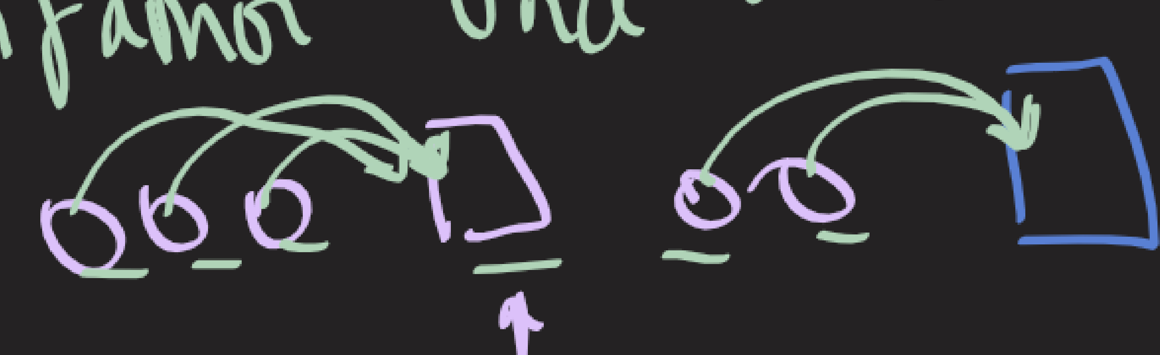
Queremos repartir $n-1$ urnas en $n+m-1$ espacios

$$\binom{n+m-1}{n-1}$$



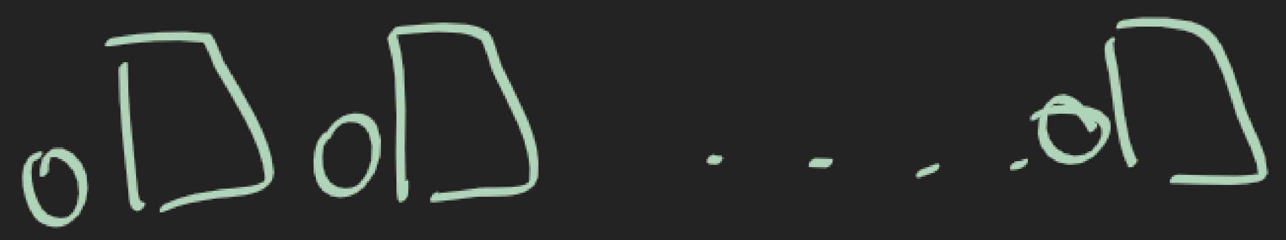
2 urnas y 5 bolitas

fijamos una urna



(b) no pueden haber urnas vacías

↳ TODAS las urnas deben tener al menos 1 bolita

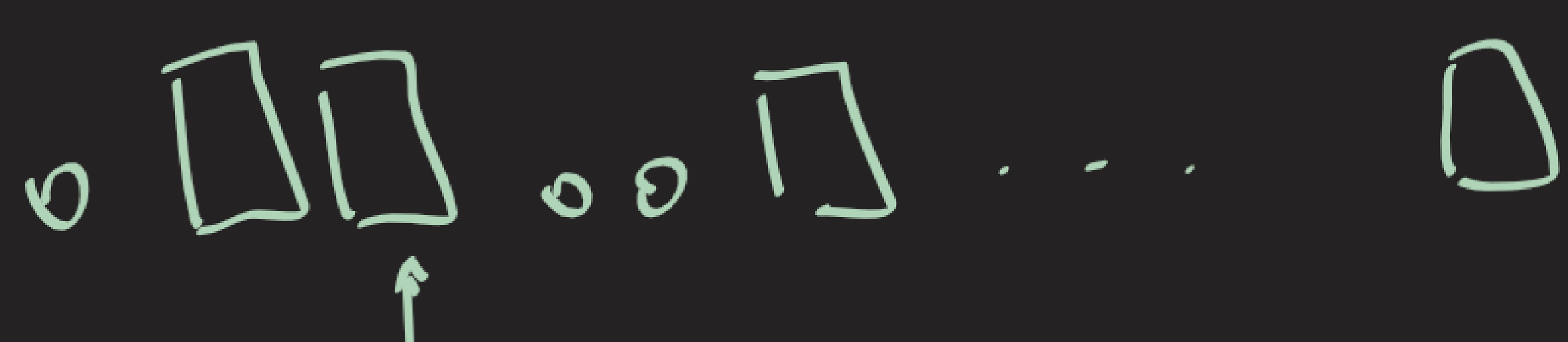


Tenemos $\underset{\substack{\uparrow \\ 1 \times \text{urna}}}{m-n}$ bolitas disponibles

Repartir $\overbrace{m-n}^{s}$ bolitas en $n$ urnas (ahora ya no hay restricciones)

por (a) $\displaystyle \binom{n+s-1}{n-1} = \binom{n+(m-n)-1}{n-1} = \binom{m-1}{n-1}$

(c) $0 < r \leq n$ urnas vacías (exactamente)



urna vacía

¿cómo elegimos las $r$ urnas? $\longrightarrow$ $\binom{n}{r}$ formas de elegir las urnas vacías

$\rightarrow$ $n-r$ urnas <u>no vacías</u> $\rightarrow$ 1 bolita a cada urna $\rightarrow$ $n-r$ bolitas

$m-(n-r)$ bolitas disponibles

y queremos repartirlas en $n-r$ urnas

por (a) $\displaystyle \binom{(n-r)+(m-(n-r))-1}{(n-r)-1} = \binom{m-1}{n-r-1}$

entonces $\displaystyle \binom{n}{r} \cdot \binom{m-1}{n-r-1}$ formas de repartir las bolitas para que queden $r$ urnas vacías

**P2.** Se dispone de un revólver con capacidad para $n \in \mathbb{N}$ balas y se insertan $k \in \{0, ..., n\}$ al azar. Dos personas juegan a la ruleta rusa, girando la nuez después de cada disparo.

*a)* Calcule la probabilidad de que el jugador que comienza disparando muera.

*b)* Evalúe en $n = 6, k = 1$.

*c)* ¿Cómo deben ser $n$ y $k$ para que el juego sea equilibrado?

$n$ espacios

$k$ balas $0 \leq k \leq n$

(a) Notemos que el juego termina cuando alguien muere

Definir 3 eventos:

$A$: el primer jugador muera → puede morir en un turno impar (para que muera en un turno $i$ tienen que salvarse antes)

$S_i$: los jugadores se salvan hasta el turno $i$

$M_{i+1}$: el jugador en el turno $i+1$ muere

$$A = (S_0 \cap M_1) \cup (S_2 \cap M_3) \cup (S_4 \cap M_5) \cup \ldots$$

$$= \bigcup_{i=0}^{\infty} S_{2i} \cap M_{2i+1}$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{i=0}^{\infty}} S_{2i} \cap M_{2i+1}\right)$$ * esta unión es disjunta

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_{2i} \cap M_{2i+1})$$ * estos eventos son independientes

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_{2i})\,\mathbb{P}(M_{2i+1})$$

* $\mathbb{P}(S_{2i})$

$\mathbb{P}(S_0) = 1$

$\mathbb{P}(S_2) = \underbrace{\left(\frac{n-k}{n}\right)}_{\text{1er turno}} \cdot \underbrace{\frac{n-k}{n}}_{\text{2° turno}}$

$\frac{\#\text{casos fav}}{\#\text{totales}}$

$$\mathbb{P}(S_4) = \underbrace{\frac{n-k}{n}}_{1°} \cdot \underbrace{\frac{n-k}{n}}_{2°} \cdot \underbrace{\frac{n-k}{n}}_{3°} \cdot \underbrace{\frac{n-k}{n}}_{4°}$$

$\vdots$

$$\mathbb{P}(S_{2i}) = \mathbb{P}(S)^{2i}$$

$$\mathbb{P}(S) = \frac{n-k}{n}$$

$\mathbb{P}(M_{2i+1}) = \frac{k}{n}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_{2i})\,\mathbb{P}(M_{2i+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{2i} \cdot \frac{k}{n}$$

$$= \frac{k}{n} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} \Big[\underbrace{\left(\frac{n-k}{n}\right)^2}_{\leq 1}\Big]^i\right)}$$

serie geométrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a} \quad |a| < 1$$

$$= \frac{k}{n}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{n-k}{n}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{n}{2n-k}$$

$$\therefore \mathbb{P}(A) = \frac{n}{2n-k}$$

(b) $n = 6$, $k = 1$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{6}{2\cdot 6 - 1} = \frac{6}{11} > \frac{1}{2}$$

(c) $n, k$ para que el juego sea equilibrado

$\hookrightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n}{2n-k} \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{2n-k} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cancel{2n} = \cancel{2n} - k$$

$$\Rightarrow k = 0$$

**P3.** $N \in \mathbb{N}$ pasajeros hacen fila para abordar un avión con $N$ asientos. Cada uno tiene un asiento asignado, pero la primera persona en la fila es una abuelita muy despistada que se sienta en cualquier asiento, *ie.* escoge uno de los $N$ asientos de forma uniforme. De ahí en adelante los pasajeros van subiendo en orden y si un pasajero encuentra su asiento desocupado, se sienta en él, pero si lo encuentra ocupado, se sienta en cualquiera de los asientos restantes al azar.
Demuestre que la probabilidad de que el último pasajero se siente en su asiento original es $\frac{1}{2}$.
*Hint.* ¿Qué ocurre si la abuelita se sienta en el asiento que corresponde? Si esto no ocurre, haga la inducción sobre el pasajero del asiento que ocupa la abuelita.

N pasajeros – N asientos

1° pasajero = abuelita

Eventos

$A_k$: abuelita se sienta en el asiento k-ésimo (de la persona k-ésima)

$X_k$: persona k-ésima encuentra su asiento ocupado.

$\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{N}$ $\quad \forall k \in \{1, \dots, N\}$

Entró la abuelita y se sentó (no sabemos donde)

Entra la 2ª persona: $\mathbb{P}(X_2) = \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{N}$

1ª opción: encuentra su asiento desocupado → se sienta en él

2ª opción: encuentra su asiento ocupado (x abuelita) → se sienta en alguno de los N-1 asientos restantes

⇒ N-2 asientos libres: el 2° asiento está ocupado y hay otro ocupado

Entra la 3ª persona: $\mathbb{P}(X_3) = \frac{1}{N-1}$ ← 2° asiento está ocupado

1ª opción: asiento desocupado → se sienta en él

2ª opción: asiento ocupado → se sienta en alguno de los N-2 asientos restantes

⇒ N-3 asientos libres: el 2° y el 3° asiento ocupado y hay otro ocupado

Entra el $k$-ésimo pasajero: $\mathbb{P}(X_k) = \frac{1}{N-(k-2)}$

están ocupados los asientos $2 — k-1 \to k-2$ asientos

y otro en los $\underbrace{N-(k-2)}_{k\text{-ésimo}}$ restantes

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X_k) = \frac{1}{N-(k-2)} \qquad \forall k \in \{2, \dots, N\}$$

Evaluando en $k=N$ (último pasajero)

$$\mathbb{P}(X_N) = \frac{1}{N-(N-2)} = \frac{1}{2}$$

$X_N$ con "dueño ocupado" son complementarios

$$\mathbb{P}(\text{dueño ocupado}) = 1 - \mathbb{P}(X_N) = \frac{1}{2}$$