

Auxiliar #2

P1. Se tienen $n \in \mathbb{N}$ urnas diferentes. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar en ellas $m \in \mathbb{N}$ ($m > n$) bolas idénticas:

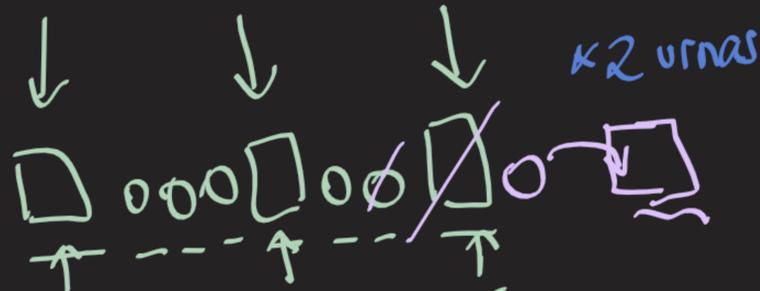
- a) sin restricción alguna en cuanto al número de bolas en cada urna;
- b) si no puede haber ninguna urna vacía;
- c) si quedan exactamente r ($0 < r \leq n$) urnas vacías?

n urnas \square
 $m > n$ bolitas \circ

(a) Sin restricciones

* Las bolitas siempre entran a una urna

EJ: 5 bolitas y 3 urnas



Notemos que si disponemos bolitas + urnas en una línea encontrar lo que buscamos es lo mismo que ver como podemos disponer las urnas en una "línea"

→ Una bolita entra a la caja si está a la izquierda de ella

En el ejemplo: 5 bolitas y 2 urnas = 7 espacios

en 7 espacios → 2 urnas

$\binom{7}{2}$ → formas para colar bolitas

n urnas
 m bolitas

} $n+m-1$ espacios
 ↑ urna final (fija)

Queremos repartir $n-1$ urnas en $n+m-1$ espacios

$$\binom{n+m-1}{n-1}$$



2 urnas y 5 bolitas
 fijamos una urna



(b) no pueden haber urnas vacías

↳ TODAS las urnas deben tener al menos 1 bolita



Tenemos $m-n$ bolitas disponibles
↑
1 x urna

Repartir $\overbrace{m-n}^s$ bolitas en n urnas (ahora ya no hay restricciones)

$$\text{por (a)} \quad \binom{n+s-1}{n-1} = \binom{n+(m-n)-1}{n-1} = \binom{m-1}{n-1}$$

(c) $0 < r \leq n$ urnas vacías (exactamente)



¿cómo elegimos las r urnas? → $\binom{n}{r}$ formas de elegir las urnas vacías

→ $n-r$ urnas no vacías → 1 bolita a cada urna → $n-r$ bolitas

$m-(n-r)$ bolitas disponibles

y queremos repartirlas en $n-r$ urnas

$$\text{por (a)} \quad \binom{(n-r) + (m-(n-r)) - 1}{(n-r) - 1} = \binom{m-1}{n-r-1}$$

entonces $\binom{n}{r} \cdot \binom{m-1}{n-r-1}$ formas de repartir las bolitas para que queden r urnas vacías

P2. Se dispone de un revólver con capacidad para $n \in \mathbb{N}$ balas y se insertan $k \in \{0, \dots, n\}$ al azar. Dos personas juegan a la ruleta rusa, girando la rueda después de cada disparo.

- Calcule la probabilidad de que el jugador que comienza disparando muera.
- Evalúe en $n = 6, k = 1$.
- ¿Cómo deben ser n y k para que el juego sea equilibrado?

n espacios

k balas $0 \leq k \leq n$

(a) Notamos que el juego termina cuando alguien muere

Definir 3 eventos:

A : el primer jugador muere \rightarrow puede morir en un turno impar (para que muera en un turno)

S_i : los jugadores se salvan hasta el turno i $\left(\begin{array}{l} \text{tiempo que} \\ \text{salvarse} \\ \text{ante} \end{array} \right)$

M_{i+1} : el jugador en el turno $i+1$ muere

$$A = (S_0 \cap M_1) \cup (S_2 \cap M_3) \cup (S_4 \cap M_5) \cup \dots$$

$$= \bigcup_{i=0}^{\infty} S_{2i} \cap M_{2i+1}$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} S_{2i} \cap M_{2i+1}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P(S_{2i} \cap M_{2i+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P(S_{2i}) P(M_{2i+1})$$

* $P(S_{2i})$

$$P(S_0) = 1$$

$$P(S_2) = \left(\frac{n-k}{n}\right) \cdot \frac{n-k}{n}$$

1er turno 2o turno

* esta unión es disjunta

* estos eventos son independientes

$\downarrow 1^o$ $\downarrow 2^o$ $\downarrow 3^o$ $\downarrow 4^o$

$$P(S_4) = \frac{n-k}{n} \cdot \frac{n-k}{n} \cdot \frac{n-k}{n} \cdot \frac{n-k}{n}$$

$$P(S_{2i}) = P(S)^{2i}$$

$$P(S) = \frac{n-k}{n}$$

casos fav / # totales

$$P(M_{2i+1}) = \frac{k}{n}$$

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} P(S_{2i}) P(M_{2i+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{2i} \cdot \frac{k}{n}$$

$$= \frac{k}{n} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left[\underbrace{\left(\frac{n-k}{n}\right)^2}_{\leq 1} \right]^i \right)$$

serie geométrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a} \quad |a| < 1$$

$$= \frac{k}{n} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{n-k}{n}\right)^2} \right)$$

$$= \frac{n}{2n-k}$$

$$\therefore P(A) = \frac{n}{2n-k}$$

(b) $n=6, k=1$

$$P(A) = \frac{6}{2 \cdot 6 - 1} = \frac{6}{11} > \frac{1}{2}$$

(c) n, k para que el juego sea equilibrado

$$\hookrightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{n}{2n-k}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2n-k} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2n = 2n - k$$

$$\Rightarrow k = 0$$

P3. $N \in \mathbb{N}$ pasajeros hacen fila para abordar un avión con N asientos. Cada uno tiene un asiento asignado, pero la primera persona en la fila es una abuelita muy despistada que se sienta en cualquier asiento, *ie.* escoge uno de los N asientos de forma uniforme. De ahí en adelante los pasajeros van subiendo en orden y si un pasajero encuentra su asiento desocupado, se sienta en él, pero si lo encuentra ocupado, se sienta en cualquiera de los asientos restantes al azar. Demuestre que la probabilidad de que el último pasajero se sienta en su asiento original es $\frac{1}{2}$.
Hint. ¿Qué ocurre si la abuelita se sienta en el asiento que corresponde? Si esto no ocurre, haga la inducción sobre el pasajero del asiento que ocupa la abuelita.