P1 Considere el siguiente experimento: Escribir, en orden aleatorio, los dígitos 1, 2 y 3.

a) Describa el espacio muestral asociado al experimento. → Vectores ✓ Conjuntos ✗

b) Para $i, j \in \{1, 2, 3\}$ distintos calcule la probabilidad del evento $A_i = \{\text{El } i\text{-ésimo dígito es } i\} \subseteq \Omega$, $P(A_i \cap A_j)$ y la probabilidad de que al menos un dígito caiga en su posición correcta.

$$\Omega = \left\{ (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \{1, 2, 3\}^3 \mid \begin{array}{l} \omega_i \neq \omega_j \\ i, j \in \{1, 2, 3\} \end{array} \right\}$$

$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

b) $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ Clave Fije el i-simo

$$P(A_i) = \frac{\text{Casos con } i \text{ en la posición } i}{\text{Casos Totales}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

↑ Fije ω_i
↑ Fije ω_j
↑ Fije ω_k
↑ Fije ω_l

← opciones ω_1
← " ω_2
← " ω_3

$P(A_i) = \frac{1}{3}$

b) $P(A_i \cap A_j) = \frac{\text{Que el } i \text{ y el } j \text{ alcen}}{|\Omega| \rightarrow 6} = \frac{1}{6}$

$$P(\underbrace{A_1 \cup A_2 \cup A_3}_{\text{Al menos 1}}) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

A1 $\overline{A_2}$ mems 1

$$-P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

P2 Sea $(\Omega, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad:

- a) Sean A y B sucesos en este espacio tales que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B)$. Pruebe que: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.
 b) Considere $A_i \subseteq \Omega$ para $i \in \{1, 2, 3\}$, demuestre que:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) \quad \neq \mathbb{P}(A \cup B \cup C)$$

(Propuesto): Pruebe que: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$

- c) Decimos que la colección de eventos $(A_i)_{i=1}^N \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una **partición** de Ω si: $\bigcup_{i=1}^N A_i = \Omega$ y $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$.

Para una partición, pruebe que debe existir un $i \in \{1, \dots, N\}$ tal que $\mathbb{P}(A_i) \leq \frac{1}{N}$ $(\mathbb{P}(A_i) \geq \frac{1}{N})$

a) Recuerden $\mathbb{P}$ es **monótona**, es decir,

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$$

$$A \cap B \subseteq A \cup B \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A \cup B)$$

$$\begin{aligned} A \cap B \subseteq A &\subseteq A \cup B \\ &\subseteq B \subseteq \end{aligned} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(B) \leq$$

Como los extremos son iguales $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B)$

$$\begin{matrix} + & \leq & \leq & \leq \\ a & \leq & b & \leq & c \end{matrix} \Rightarrow \cancel{x-a} \leq y-b \leq z-c$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cup B) \cap C \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \end{aligned}$$

Recordatorio: $-P(X \cup Y) \geq -P(X) - P(Y)$

$\Rightarrow \geq P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$

$\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^N A_i) = \sum_{i=1}^N P(A_i)$
Disjuntas
↓
Partición

$P(\Omega) = 1$

$\sum_{i=1}^N P(A_i) = 1 \quad (1)$

Supongamos $\forall i \in \{1, \dots, N\} P(A_i) \geq \frac{1}{N}$

Usando (1) $\Rightarrow \sum_{i=1}^N P(A_i) \geq \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} = 1 \quad *$

$\Rightarrow \exists i \text{ tal que } P(A_i) \leq \frac{1}{N}$

P3 Considere el experimento de lanzar 5 dados distinguibles entre sí y balanceados (no están cargados).

- Especifique el modelo probabilístico del experimento enunciado. Es decir, describa $(\Omega, \mathbb{P})$.
- Escriba explícitamente el evento: "Las 5 caras obtenidas son diferentes".
- Suponga que el 1 es comodín, es decir, se puede reemplazar por cualquier otro número. Calcule la probabilidad, según lo hecho en a, de obtener la misma cara en los 5 dados.

Distinguibles, se puede entender como que hay un orden lanzamiento o que los dados son de colores.

$$[6]^5$$

$$a) \Omega = \{(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^5\}$$

$$\mathbb{P} \text{ es equiprobable} \quad \mathbb{P}(\vec{d}) = \frac{1}{|\Omega|} = \left(\frac{1}{6}\right)^5$$

$$b) A = \{\vec{d} \in \Omega \mid d_i \neq d_j, \forall i \neq j, i, j \in \{1, \dots, 5\}\}$$

$$c) P(\text{Todos iguales}) = \frac{\text{Todos } i \text{'s y } 1 \text{'s}}{6^5} \quad i \in \{1, \dots, 6\}$$

Fijando i Primer dado i o 1

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 \rightarrow \text{Hay un caso que a los otros}$$

Cuantos i 's son: $2=5 \Rightarrow 5 \cdot 2^5$

$$5 \cdot 2^5 - 5$$

$$A_2 = \text{Todos } 2 \text{'s y } 1 \text{'s}$$

$A_3 =$ " " $\rightarrow$'s $\rightarrow$ 1's

$A_2 \cap A_3 =$ Casos para 1's

$S \cdot (2^5 - 1) + 1 \rightarrow$ El caso de 1's
 $\cup$ El caso de solo 1's
Arreglos de $i \in \{2, \dots, 6\}$

$$P = \frac{S \cdot 2^5 - 4}{6^5}$$

P4 Consideremos los string binario de largo 7, estos se definen como secuencias de largo 7 de 0's o 1's. Por ejemplo 0100010 es un string binario de largo 7.

Determine:

- ¿Cuántos string binarios de largo 7 existen?
- ¿Cuántos string binarios hay de largo 7 que empiezan con 0 o que terminan con 11?
- (Propuesto) ¿Cuántos string de largo 7 tienen tres 0's consecutivos o cuatro 1's consecutivos?

$$a) \Omega = \{(w_1, w_2, w_3, \dots, w_7) \in \{0, 1\}^7\}$$

$$|\Omega| = 2^7 \rightarrow \text{veces que preguntó}$$

2 opciones

b) Empezar 0 $\Leftrightarrow$ String de largo 6

$\downarrow$
 2^6 (De manera similar)

Terminar 11 $\Leftrightarrow$ String de largo 5

2^5 (Similar)

Notar que $2^6 + 2^5$ (Cuando 2^4 $\leftarrow$ String largo 4)

Al que parte 0 no termina con 11)

$$2^6 + 2^5 - 2^4 = 2^4 (4 + 2 - 1) = 2^4 \cdot 5$$

c) - Parten con 3 ceros $\Leftrightarrow$ String de largo 4

2^4 opciones

- Parten con 1 y luego 3 ceros $\Leftrightarrow$ string de largo 3

2^3

- 2 0 5 5A -1000-- $\Leftrightarrow$ string de largo 3 2^3

- --1000- $\Leftrightarrow$ largo 3 = 2^3

- ---1000 $\Leftrightarrow$ largo 3 = $2^3 - 1$ (Eliminar 000 1000)

- 1111--- $\Leftrightarrow$ $2^3 - 1$
 $\uparrow$ caso 1111000

- 01111-- $\Leftrightarrow$ 2^2

- -01111- $\Leftrightarrow$ 2^2

- --01111 $\Leftrightarrow$ $2^2 - 1$

$$2^4 + 4 \cdot 2^3 - 1 + 2^3 - 1 + 3 \cdot 2^2 - 1$$

$$2^4 + 5 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 3 = 2^2(4 + 10 + 3) - 3$$

$$= 17 \cdot 2^2 - 3$$

$$= 68 - 3 = \boxed{65}$$

(Propuesto): Pruebe que: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$

Suponiéndolo para $n-1$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right) \\ &\stackrel{H.p.}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right) &= -\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right) \\ &\geq -\sum_{i=1}^{n-2} \mathbb{P}(A_i \cap A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1} \cap A_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &\geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \underbrace{\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \mathbb{P}(A_{n-1} \cap A_n)} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \end{aligned}$$