MA3101-1 Elementos de Álgebra 2020
Profesor: Ángel Pardo.
Auxiliares: Felipe Flores Ll., Pablo Paredes, Benjamín Jauregui.
Fecha: 18 de Diciembre del 2020

Auxiliar 12

P1. Encuentre todos los grupos abelianos de orden 49 y 111. ¿Que puede decir de n general?

P2. **Lema de Nakayama:** Sea M un R-módulo finitamente generado. Asuma que si I un ideal de R y ϕ un endomorfismo de M tal que $\phi(M) \subset IM$, entonces ϕ satisface una ecuación de la forma

$$\phi^n + a_1\phi^{n-1} + \ldots + a_n \mathrm{id}_M = 0$$

con $a_i \in I$.

a) Sea I un ideal tal que $IM = M$. Muestre que existe $x \in R$ tal que $x - 1 \in I$ y $xM = 0$.

b) Defina el radical de Jacobson ($\mathfrak{J}$) como la intersección de todos los ideales maximales de R. Si I es un ideal de R tal que $I \leq \mathfrak{J}$, pruebe que $IM = M$ implica $M = 0$.

c) Sea $N \leq M$ y $I \subset \mathfrak{J}$ un ideal. Muestre que si $M = IM + N$, entonces $M = N$.

P3. Sea K/F una extensión de cuerpos y $p \in F[X]$ irreducible y de grado ≥ 2. Muestre que si $\gcd(gr(p), [F : K]) = 1$, p no tiene raices en K.

P4. Sea K, F cuerpos finitos.

a) Exhiba un polinomio $p \in K[X]$ tal que $p(x) = 0$, $\forall x \in K$.

b) Exhiba un polinomio $q \in K[X]$ tal que $q(x) \neq 0$, $\forall x \in K$.

c) **(Propuesto)** Pruebe que K es un subcuerpo de F si y sólo si existe un primo p tal que $\log_p(|K|) | \log_p(|F|)$.

P5. Un R-módulo se dice *noetheriano* si toda cadena creciente de submódulos es estacionara, es decir, para toda sucesión creciente $M_1 \leq M_2 \leq \ldots \leq M_n \leq \ldots$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $M_{n+k} = M_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pruebe que, para cada endomorfismo $f : M \to M$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$Imf^k \cap Kerf^k = \{0\}$$