

P1) Como $J^2 \neq 0$, $\exists b \in J$ tal que $Jb \neq 0$. Luego $Jb \subseteq J$ y por minimalidad $J = Jb$ ($b \in Jb$). Luego existe $e \in J$ tal que $eb = b \Leftrightarrow eb - b = 0$ y en $xeb - xb = (xe - x)b = 0$ $\forall x \in R$. $\Rightarrow \boxed{\forall x \in R, xe - x \in I}$. Notemos que I es un ideal izquierdo ($I = \text{Ker}(x \mapsto xb)$), por lo que $I \cap J \subseteq J$ y como $e \in J$ y $eb = b \neq 0$, $I \cap J \neq J \Rightarrow I \cap J = \{0\}$. Como $e^2 - e \in I \cap J \Rightarrow e^2 - e = 0 \Rightarrow e^2 = e$. Además, Re es ideal izquierdo y como $e \in J$, $Re \subseteq J \Rightarrow Re = J$.

Para la segunda parte, Sea $x \in eRe$, $x \neq 0 \Rightarrow \{0\} \neq Rb \subseteq Re$ y como $Re = J$ es minimal, $Rb = Re = J$. En particular, existe $r \in R$ tal que $re = b$. Tenemos $(ere)b = erb = e^2 = e$. Es decir, el inverso por la izquierda de b es ere .

Como $ere \in eRe$, existe $a(ere) = e$. Veamos que

$$\begin{aligned}
 b(ere) &= e; \quad bere = bre = ebre = a(dre)bre \\
 &= a(e(rb))re \\
 &= a(ere) \\
 &= e
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b^{-1} = ere.$$

□

P2]

1) $\Rightarrow$ 2) | Sea I un ideal no nulo. Si no fuese finitamente generado, podemos elegir $x_1 \in I$, $x_1 \in I \setminus \langle x_1 \rangle$, $\dots$, $x_m \in I \setminus \langle x_1, \dots, x_{m-1} \rangle$ y obtenemos la cadena creciente

$$\langle x_1 \rangle \subseteq \langle x_1, x_2 \rangle \subseteq \dots \subseteq \langle x_1, \dots, x_m \rangle \subseteq \dots$$

que no puede ser estacionaria.

2) $\Rightarrow$ 3) | Sea $\mathcal{L}$ un conjunto de ideales sin un elemento maximal.

Sea $I_1 \in \mathcal{L}$, como $\mathcal{L}$ no tiene elemento maximal, existe $I_2 \in \mathcal{L}$ tal que $I_1 \subseteq I_2$, repitiendo el proceso, obtenemos una cadena

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_m \subseteq \dots \Rightarrow I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ debe ser finitamente generado, con lo que la cadena para.

3) $\Rightarrow$ 1) | Si hubiera una cadena no estacionaria

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$, el conjunto $\mathcal{L} = \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no tendría elemento maximal.

P3]

$$a) \text{ Si } f, g \in I_x, \quad f(x) + g(x) = 0 \text{ y } f(x)g(x) = 0 \\ \Rightarrow f + g, fg \in I_x.$$

Para ver que es maximal, sea $J \supsetneq I_x$ y suponga que existe $f \in J \setminus I_x$. Sea $g \in \mathcal{L}(X)$ tal que $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
La función $1 - fg$ vale 0 en $x \Rightarrow 1 - fg \in I_x \leq J$

Por otro lado $fg \in J \Rightarrow 1 = (1 - fg) + fg \in J \Rightarrow J = \mathcal{L}(X)$. $\square$

b) Sea J ideal maximal de $\mathcal{L}(X)$. Definamos

$$S := \{x \in X \mid f(x) = 0, \forall f \in J\}$$

y vemos que $S \neq \emptyset$. En efecto si $S = \emptyset$, podríamos elegir, para cada $x \in X$, una función $f_x \in J$ tal que $f_x(x) \neq 0$.

$$\text{Defina } U_x = f_x^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \ni x \Rightarrow X \subseteq \bigcup_{x \in X} U_x$$

$$\Rightarrow \exists \{U_{x_i}\}_{i=1}^m \text{ subcubrimiento finito, definimos } f = \sum_{i=1}^m f_i^2 \in J$$

Continua, nunca 0 $\Rightarrow$ invertible $\Rightarrow J = \mathcal{L}(X)$.

$$\text{Luego } S \neq \emptyset. \Rightarrow J \subseteq \{f \mid f(x) = 0 \forall x \in S\} \\ \subseteq I_x \quad \forall x \in S$$

Si $I_x \neq J$, J no es maximal. $\Rightarrow I_x = J$. $\square$