MA3101-1 Elementos de Álgebra 2020
Profesor: Ángel Pardo.
Auxiliares: Felipe Flores Ll., Pablo Paredes, Benjamín Jauregui.
Fecha: 28 de octubre de 2020

Auxiliar 6

- **Definición: (ideal minimal)** Un ideal izquierdo (resp. derecho) $I \leq R$ se dice minimal si para todo ideal izquierdo (resp. derecho) J, $J \leq I \Rightarrow J \in \{\{0\}, I\}$.

- **Definición: (ideal maximal)** Un ideal izquierdo (resp. derecho) $I \leq R$ se dice maximal si para todo ideal izquierdo (resp. derecho) J, $I \leq J \Rightarrow J \in \{R, I\}$.

P1. **Lema de Brauer:** Sea R un anillo con unidad y J un ideal izquierdo minimal tal que $J^2 \neq \{0\}$. Entonces existe un elemento idempotente $e \in J$ tal que $J = Re$ y además eRe es un anillo de división.

Hint: Notar que $J^2 \neq \{0\}$ implica que $Jb \neq \{0\}$ para algún b. Considerar además $I := \{x \in R \mid xb = 0\}$.

P2. Un anillo conmutativo se dice *noetheriano* si toda cadena creciente de ideales es estacionara, es decir, para toda sucesión creciente $I_1 \leq I_2 \leq \ldots \leq I_n \leq \ldots$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $I_{n+k} = I_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pruebe que las siguientes son equivalentes:

a) R es noetheriano

b) Todo ideal de R es finitamente generado.

c) Cualquier colección de ideales de R tiene un elemento maximal.

P3. Sea X un conjunto compacto y $\mathcal{C}(X)$ el anillo de funciones continuas a valores reales con dominio X.

a) Muestre que, para cada $x \in X$, $I_x := \{f \in \mathcal{C}(X) \mid f(x) = 0\}$ es un ideal maximal.

b) Muestre que todo ideal maximal es de la forma I_x para algún $x \in X$.

c) Concluya que existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de X y los ideales maximales de $\mathcal{C}(X)$.

d) ¿Cuales son los ideales maximales de $\mathbb{R}^n$? (con la multiplicación $(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n) = (a_1b_1, \ldots, a_nb_n)$)