MA3101-1 Elementos de Álgebra 2020
Profesor: Ángel Pardo.
Auxiliares: Felipe Flores Ll., Pablo Paredes, Benjamín Jauregui.
Fecha: 2 de Octubre del 2020

Auxiliar 3

P1. Muestre que los únicos grupos de orden $2p$, p primo son $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ y D_{2p}.

Hint: Podría servirle recordar que, si todos los elementos de un grupo finito son de orden 2, el grupo es isomorfo a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

P2. Sea $n \in \mathbb{N}$, p primo y $m = p^n - 1$. Encuentre el orden de $p + m\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ y deduzca que

$$n \,|\, \varphi(p^n - 1).$$

Con φ la función phi de Euler.

P3. Responda:

a) Pruebe que existe un único subgrupo propio normal no trivial N de S_3 y describa S_3/N.
b) ¿Como se diferencian S_3 y $N \times S_3/N$?
c) Encuentre todos los grupos de orden 6.
d) ¿Cuantos automorfismos tiene un grupo de orden 6?
e) ¿Cuantos monomorfismos hay de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ en S_5 y cuantos homomorfismos hay de S_5 en $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?

P4. Definimos el grupo de Heisenberg como

$$\mathcal{U}_n = \{A \in GL_n(\mathbb{Z}) \mid A_{ii} = 1, \forall i, A_{ij} = 0, \forall i > j\}$$

Y sea $H = \mathcal{Z}(\mathcal{U}_3)$, el centro de $\mathcal{U}_3$. Muestre que $H \cong \mathbb{Z}$ y que $\mathcal{U}_3/H \cong \mathbb{Z}^2$. Por otro lado, muestre que $\mathcal{U}_3$ no se puede escribir como producto semidirecto entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}^2$, mostrando que no existe ningun subgrupo $\mathbb{Z}^2 \cong K \leq \mathcal{U}_3$ tal que $HK = \mathcal{U}_3$ y $H \cap K = \{1\}$.

P5. **(Propuesto)** Decimos que un subgrupo $K \leq G$ es característico si $\varphi(K) = K$, para todo $\varphi \in \mathsf{Aut}(G)$. Pruebe las siguientes afirmaciones sobre subgrupos característicos:

1) $\mathcal{Z}(G)$ es característico.
2) Si $N \trianglelefteq G$ y H es característico de N, entonces $H \trianglelefteq G$
3) Si N es característico de G y H es característico de N, entonces H es característico de G.
4) Sea N característico de G y K un subgrupo de G que contiene a N tal que G/K es característico de G/N. Entonces K es característico de G.

Si $N \trianglelefteq G$ y $H \trianglelefteq N$, ¿Es cierto que $H \trianglelefteq G$?.