MA2002-6. Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gonzalo Flores.
Auxiliar: Javiera Palominos C.

Auxiliar 2: Coordenadas ortogonales.

23 de septiembre 2020

Recuerdo

- Un sistema de coordenadas curvilienas es una función $\vec{r}(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ definida en una región de $\mathbb{R}^3$, que es invertible, suficientemente diferenciable y con matriz jacobiana invertible.
- Se definen los factores de escala de un sistema de coordenadas curvilineas $\vec{r}(u,v,w)$ por:
  $h_u = \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right\|$, $h_v = \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right\|$, $h_w = \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right\|$
- $\hat{u} = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\hat{v} = \frac{1}{h_v}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$, $\hat{w} = \frac{1}{h_w}\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$
- $rot\vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$
- $div\vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}[\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w)\, \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w)\, \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)]$
- Un campo vectorial $\vec{F}$ se dice conservativo si existe un campo escalar (que llamaremos potencial) f tal que $\vec{F} = \nabla f$

Problemas

P1. Considere un sistema de coordenadas cilíndricas.

a) Calcule los factores escalares correspondientes (h_ρ, h_θ, h_z).

b) Calcule los valores unitarios $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$, $\hat{z}$. Verifique que son ortogonales y encuentre el orden positivo.

c) Sea $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2}\cos(\arctan(\frac{y}{x})) - \arctan(\frac{y}{x})\sin(\arctan(\frac{y}{x})) \\ \sqrt{x^2+y^2}\sin(\arctan(\frac{y}{x})) + \arctan(\frac{y}{x})\cos(\arctan(\frac{y}{x})) \\ z \end{pmatrix}$
Calcule la divergencia y el rotor de F.

P2. Diremos que un campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Eje Z}\} \to \mathbb{R}^3$ tiene simetría cilíndrica si se puede escribir en coordenadas cilíndricas como:

$$\vec{F}(\vec{\rho}) = F_\rho(\rho)\hat{\rho}, \quad \rho > 0$$

Para alguna función $F_\rho : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ de clase C^1.

a) Muestre que todo campo con simetría cilíndrica es irrotacional.

b) Verifique que si un campo tiene simetría cilíndrica, entonces:

$$div(\vec{F}) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(F_\rho \rho)}{\partial \rho}$$

c) Deduzca que un campo con simetrıa cilındrica es solenoidal (tiene divergencia nula) en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{Eje Z}\}$ si y solo si para alguna constante $K \in \mathbb{R}$:

$$\vec{F}(\vec{\rho}) = \frac{K}{\rho}\hat{\rho}$$