MA2002-6. Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gonzalo Flores.
Auxiliar: Javiera Palominos C.

Auxiliar 1: Campos vectoriales y escalares.

9 de septiembre 2020

Recuerdo

- Dado un campo escalar $f = f(x,y,z)$ de clase $\mathcal{C}^1$, ie, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$, se define su **gradiente** como el campo vectorial

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z), \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)\right)$$

- **Notación: Operador Diferencial Nabla**

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Sea $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$,

- Se define la **divergencia** de $\vec{F}$ como

$$\text{div}\, \vec{F} := \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

- Se define el **rotor** de $\vec{F}$ como

$$\text{rot}\, \vec{F} := \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y F_3 - \partial_z F_2 \\ \partial_z F_1 - \partial_x F_3 \\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \end{pmatrix}$$

Problemas

P1. *a)* Dibuje los siguientes campos vectoriales.

1) $F(x,y) = (x,y)$
2) $F(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{-z}{x^2+y^2+z^2}\right)$
3) $F(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$

b) Calcule la divergencia y rotor de los campos anteriores.

c) Calcule el gradiente en coordenadas cartesianas de

$$f(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

P2. Sea ϕ un campo escalar y F, G campos vectoriales suficientemente diferenciables. Demuestre lo siguiente.

a) $div(\phi \nabla \phi) = \|\nabla \phi\|^2 + \phi \Delta \phi$

b) $\Delta G = \nabla(div(G)) - rot(rot(G))$

c) $div(F \times G) = G \cdot rot(F) - F \cdot rot(G)$