Clase 3: Calculo vectorial

Donato Vásquez Varas
Universidad de Chile
Cálculo Avanzado y Aplicaciones MA 2002-3
08/09/2020

Que veremos hoy?

- Calculo Vectorial:
  - Sistemas de coordenadas ortogonales.
  - Operadores diferenciales en coordenadas ortogonales

Dudas

$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\dfrac{\partial f}{\partial y} > 0 \quad \forall \vec{x} \in \Omega$

$\underbrace{f(\overbrace{x, y}^{\vec{x}}) = \alpha \quad , \quad f \in C^1(\Omega)}$ $\rightarrow \Omega = f^{-1}(\{\alpha\})$

$\Rightarrow \Omega$ es una curva.

p.d.q.: $\exists \ \vec{\phi} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, ϕ continua

t.q. $\vec{\phi}(t) \in \Omega \quad \forall t \iff f(\vec{\phi}(t)) = \alpha$

$\hookrightarrow$ parametro

Dudas

Def: Una curva $\vec{\phi} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$
con ϕ función continua

(*) Obs: $\vec{\phi}([a,b])$ (conjunto imagen es una curva)

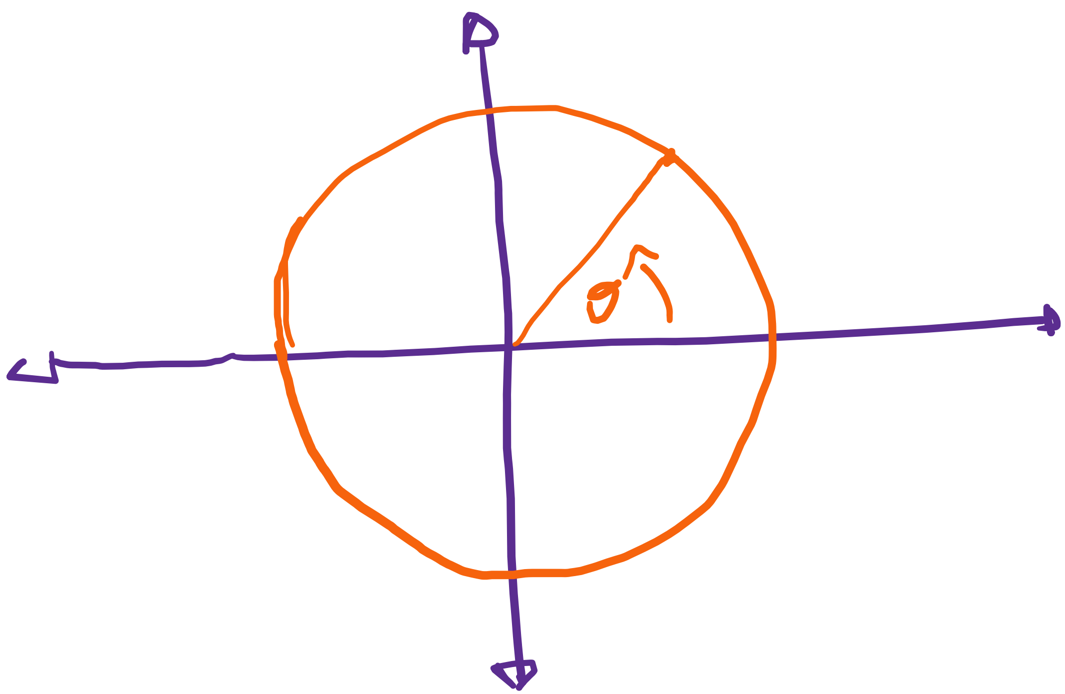
y $\vec{\phi}$ es la parametrización de la curva

Dudas

parametro

$$\vec{\phi}(\theta) = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$$

$$\vec{\phi} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$



Ejemplo

Como parametrizo ?

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

$f(x,y)=x^2+y^2$ con $\alpha=1$.

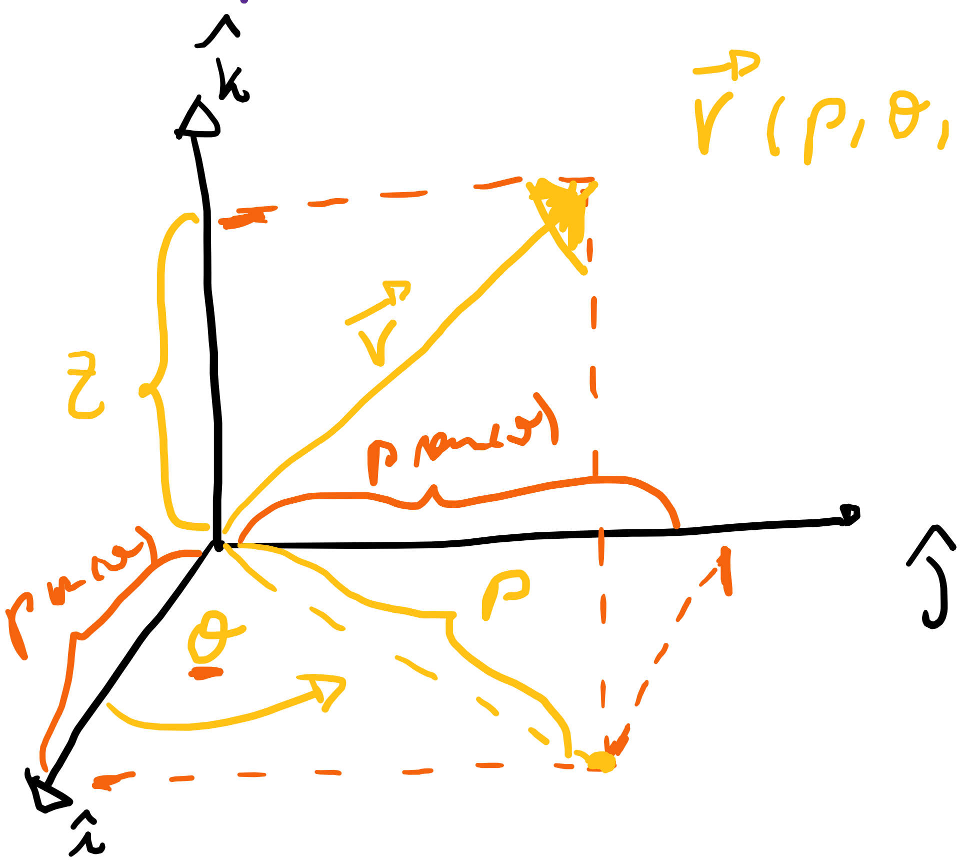
$$\vec{\phi}_1(x)=\left(x,\sqrt{1-x^2}\right),\quad x\in[-1,1]$$

solo la mitad superior del circulo.

$$\vec{\phi}_2(x)=\left(x,-\sqrt{1-x^2}\right),\quad x\in[-1,1]$$

Sistema de coordenadas ortogonales

Ejemplo: Coordenadas cilíndricas



$$\vec{r}(\rho,\theta,z) = \underbrace{\rho\cos(\theta)\,\hat{\imath} + \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}}$$

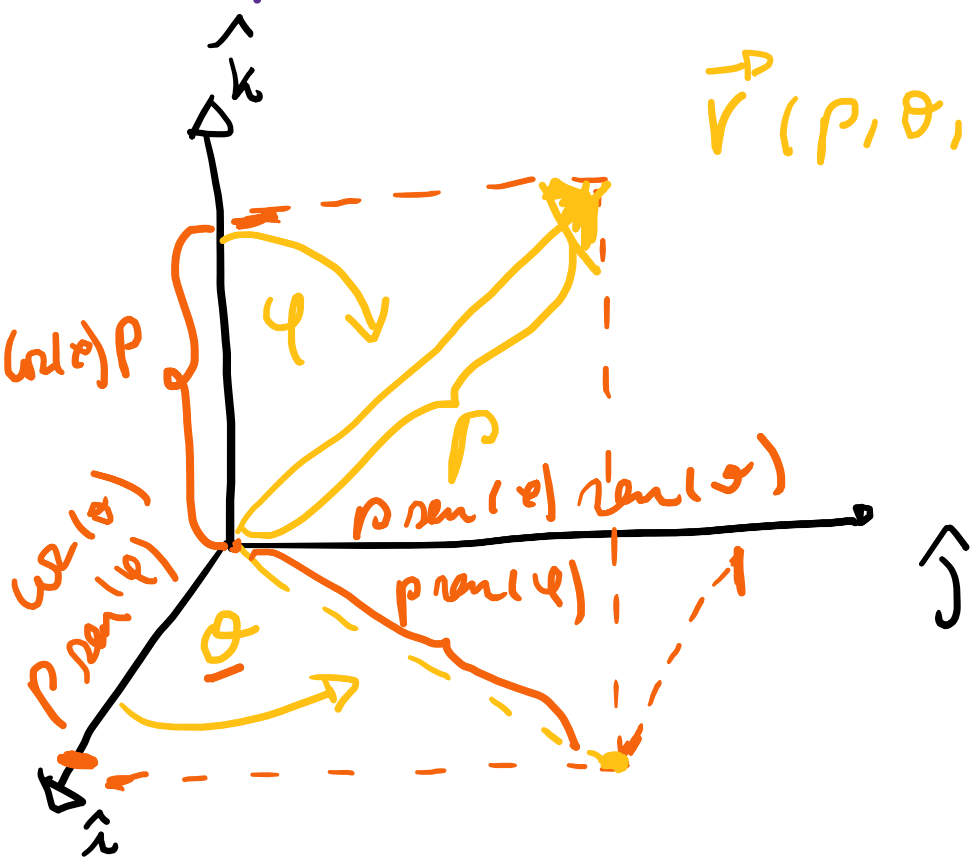
$$x = \rho\cos(\theta)$$

$$y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$z = z$$

Sistema de coordenadas ortogonales

Ejemplo: Coordenadas esféricas



$$\underbrace{\vec{r}(\rho,\theta,z) = \rho\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi)\,\hat{\imath} + \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi)\,\hat{\jmath} + \rho\cos(\varphi)\,\hat{k}}$$

$$x = \rho\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi)$$

$$y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi)$$

$$z = \rho\cos(\varphi)$$

Sistema de coordenadas ortogonales

Los sistemas cilindrico y esferico

son curvos :

Si avanzo de $\vec{r}(\rho, \theta, z)$ a

$\vec{r}(\rho + \underline{\Delta \rho}, \theta + \underline{\Delta \theta}, z + \underline{\Delta z})$ no estoy

avanzando una distancia $\Delta \rho + \Delta \theta + \Delta z$

Sistema de coordenadas ortogonales

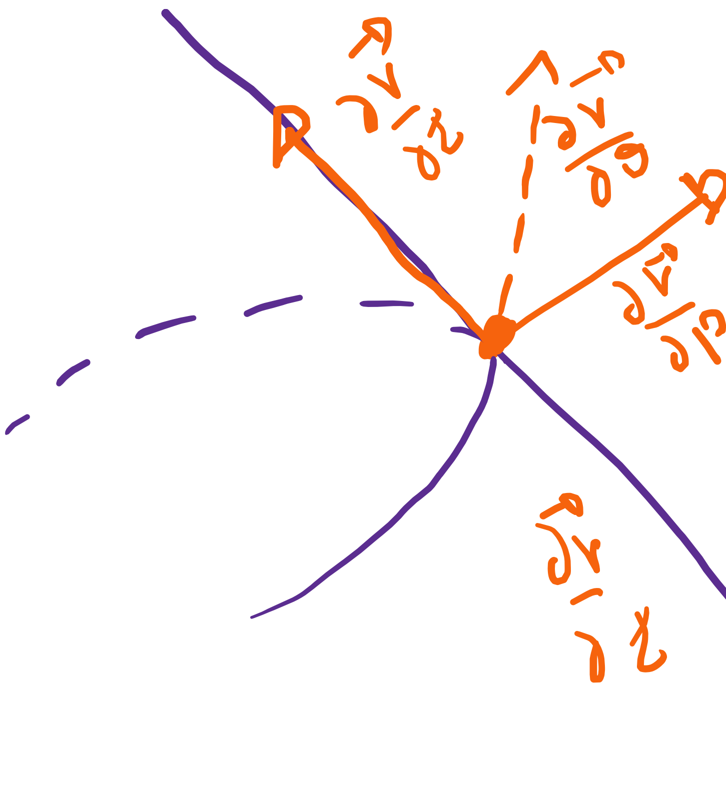
Pero si $\Delta\rho$, $\Delta\theta$ y Δz son pequeña puedo usar Taylor:

$$f(\vec{x}+\Delta\vec{x}) = \nabla f(\vec{x})\cdot\Delta\vec{x} + \nabla h(\vec{x}) + O(|\Delta x|)$$

$$\vec{r}(\rho+\Delta\rho, \theta+\Delta\theta, z+\Delta z)$$

$$\approx \vec{r}(\rho,\theta,z) + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}(\rho,\theta,z)\Delta\rho + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}(\rho,\theta,z)\Delta\theta + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}(\rho,\theta,z)\Delta z$$

Sistema de coordenadas ortogonales



$\approx$ Parecido al sistema cartesiano o plano

Sistema de coordenadas ortogonales

Esto nos dice que cerca de un punto de coordenadas (r, θ, z) se comporta de manera más "plana" siguiendo los vectores

$$\left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}(\rho, \theta, z);\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}(\rho, \theta, z),\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}(\rho, \theta, z) \right\}$$

Sistema de coordenadas ortogonales

Definición: Diremos que un sistema de coordenadas $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es ortogonal si los vectores $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ son l.i. y ortogonales | $\vec{r}(u, v, w)$ Parámetros

$$\hat{u} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\|} \; ; \; \hat{v} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|} \; ; \; \hat{w} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\|}$$

Sistema de coordenadas ortogonales

Para que esto tenga sentido debemos pedir que el sistema de coordenadas sea "no degenerado"

$$\vec{r} = (r_1, r_2, r_3) \doteq (x, y, z)$$

$$\det\left(J_{\vec{r}}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_1}{\partial v} & \frac{\partial r_1}{\partial w} \\ \frac{\partial r_2}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial v} & \frac{\partial r_2}{\partial w} \\ \frac{\partial r_3}{\partial u} & \frac{\partial r_3}{\partial v} & \frac{\partial r_3}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

Sistema de coordenadas ortogonales

En el sistema $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

tiene más sentido describir los vectores

en la base $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$:

$$\vec{F} = F_1 \hat{\imath} + F_2 \hat{\jmath} + F_3 \hat{k} \longrightarrow$$ coordenadas cartesianas

se puede porque $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ son ortogonales

$$\vec{F} = \underline{F_u \hat{u}} + \underline{F_v} \hat{v} + \underline{F_w \hat{w}}$$

donde $F_u = \vec{F} \cdot \hat{u}$, $F_v = \vec{F} \cdot \hat{v}$, $F_w = \vec{F} \cdot \hat{w}$

Ejemplos

Consideremos las coordenadas cilíndricas

$$\vec{r}(\rho,\theta,z) = \overbrace{\rho\cos(\theta)}^{x}\,\hat{i} + \overbrace{\rho\,\mathrm{sen}(\theta)}^{y}\,\hat{j} + \overbrace{z}^{z}\,\hat{k}$$

donde $(\rho,\theta,z) \in D = [0,+\infty)\times[0,2\pi)\times(-\infty,\infty)$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos(\theta)\,\hat{i} + \mathrm{sen}(\theta)\,\hat{j} + 0\cdot\hat{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -\rho\,\mathrm{sen}(\theta)\,\hat{i} + \rho\cos(\theta)\,\hat{j} + 0\cdot\hat{k}$$

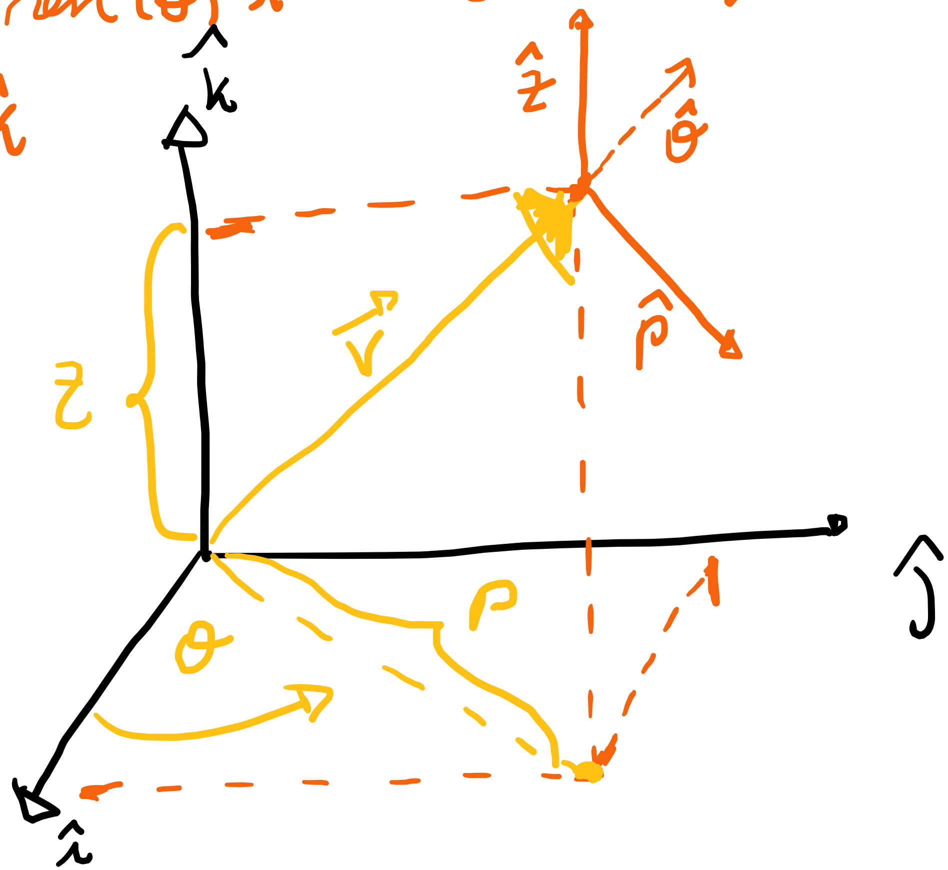
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = 0\cdot\hat{i} + 0\cdot\hat{j} + 1\cdot\hat{k}$$

Ejemplos

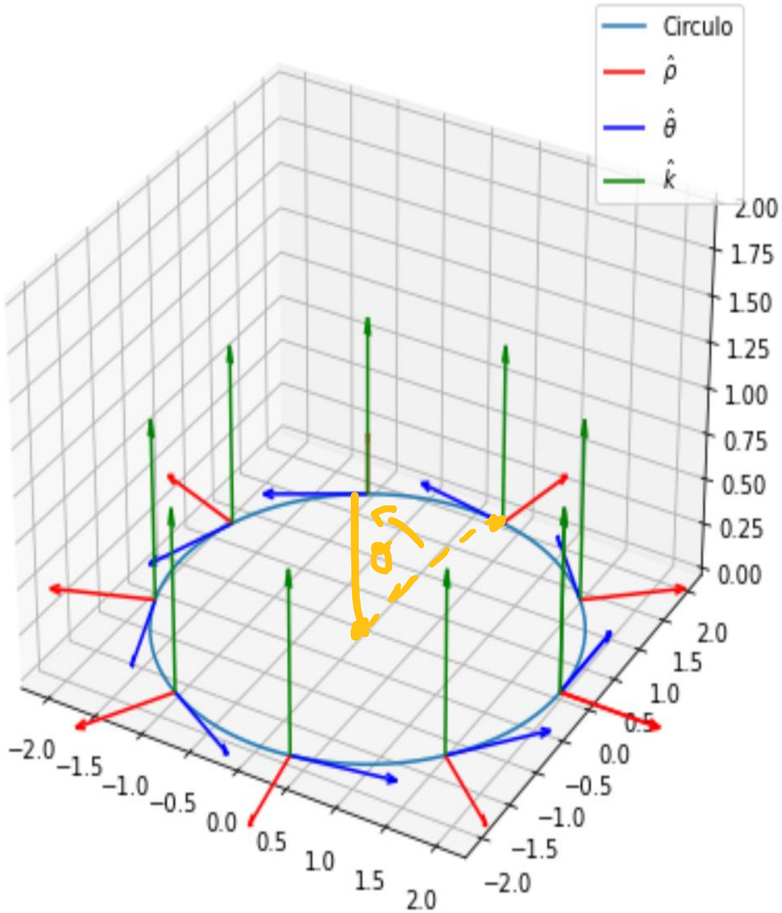
$$\Rightarrow \quad \hat{\rho} = \cos(\theta)\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}(\theta)\,\hat{\jmath} + 0\cdot\hat{k}$$

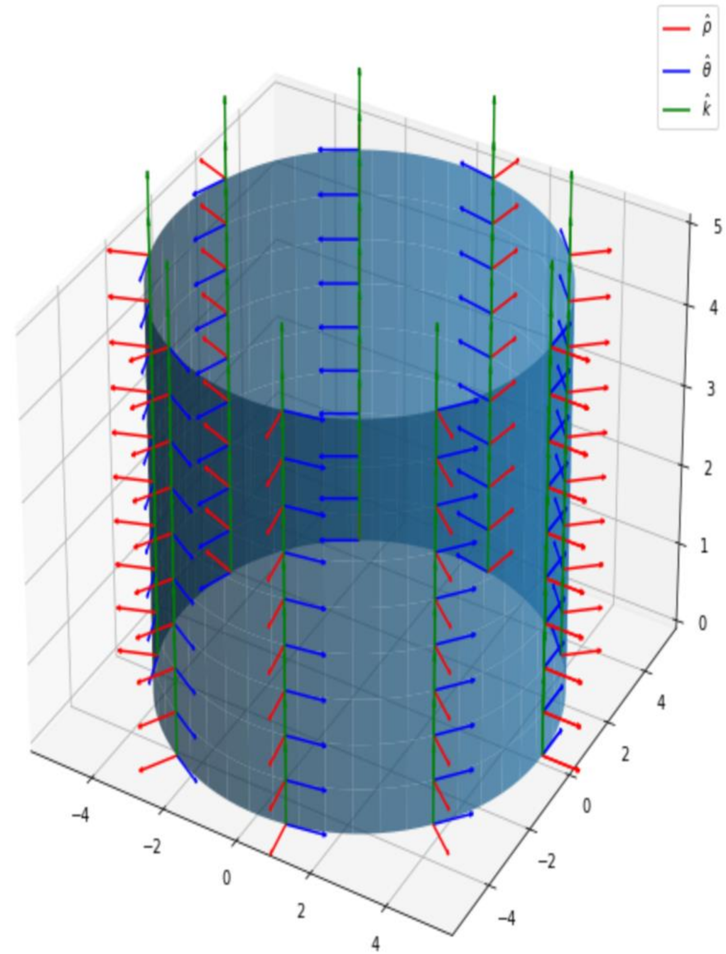
$$\hat{\theta} = -\operatorname{sen}(\theta)\,\hat{\imath} + \cos(\theta)\,\hat{\jmath} + 0\cdot\hat{k}$$

$$\hat{z} = \hat{k}$$



Ejemplos


Circulo
$\hat{\rho}$
$\hat{\theta}$
$\hat{k}$
θ
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0


$\hat{\rho}$
$\hat{\theta}$
$\hat{k}$
0
1
2
3
4
5
−4
−2
0
2
4

Ejemplos

¿Es un sistema ortogonal?

$$\hat{\rho}\cdot\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} -\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) \\ +\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) \end{matrix} = 0$$

$$\hat{\rho}\cdot\hat{k} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \; ; \; \hat{\theta}\cdot\hat{k} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ no ortogonales.

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \neq ?$

$\rightarrow \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = \vec{v}_1\cdot\vec{v}_3 = \vec{v}_2\cdot\vec{v}_3 = ?$

$\Rightarrow$ son l.i.

Ejemplos

Ahora expresemos $\vec{F} = x\, e^{\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}\,\hat{\imath} + y\, e^{\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}\,\hat{\jmath} + (x^2+y^2)\, z\,\hat{k}$

$$\Rightarrow \vec{F} = \rho\cos(\theta)\, e^{\tan^{-1}\left(\frac{\rho\,\operatorname{sen}(\theta)}{\rho\cos(\theta)}\right)}\,\hat{\imath} + \rho\,\operatorname{sen}(\theta)\, e^{\tan^{-1}\left(\frac{\rho\,\operatorname{sen}(\theta)}{\rho\cos(\theta)}\right)}\,\hat{\jmath} + \left(\rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\operatorname{sen}^2(\theta)\right)\cdot z\,\hat{k}$$

Ejemplos

$$\vec{F} = \rho\cos(\theta)\, e^{\theta}\, \hat{\imath} + \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\, e^{\theta}\, \hat{\jmath} + z\,\rho^{2}\, \hat{k} \longrightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}\right)$$

$$\vec{F}\cdot\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta)\, e^{\theta} \\ \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\, e^{\theta} \\ z\,\rho^{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \rho\, e^{\theta}$$

$$\vec{F}\cdot\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta)\, e^{\theta} \\ \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\, e^{\theta} \\ z\,\rho^{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Ejemplos

$$\vec{F}\cdot\hat{k} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta)\, e^{\theta} \\ \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\, e^{\theta} \\ z\rho^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = z\rho^2$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \rho e^{\theta}\cdot\hat{\rho} + 0\cdot\hat{\theta} + z\rho^2\hat{k}$$

$$\vec{F} = \underbrace{\rho e^{\theta}}_{F_\rho}\hat{\rho} + \underbrace{0}_{F_\theta}\cdot\hat{\theta} + \underbrace{z\rho^2}_{F_z}\hat{k}$$