

Clase 8.
Calcular la Integral de Flujo $\iint_{\Sigma} \nabla \Phi \cdot dS$, si clase #8.

Σ es el hemisferio superior del Casquete elipsoidal

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ orientado según la normal}$$

Interior y Φ es el campo escalar

$$\Phi(x, y, z) = (x+1)^2 + 2(y-1)^2 + z^2.$$

Sol:

Primero calculamos $\nabla \Phi(x, y, z) = (2(x+1), 4(y-1), 2z)$.

Para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Note que $\Phi \in C^1$ en todo $\mathbb{R}^3$,
en particular en el interior de Σ .

Parametrización del elipsoide:

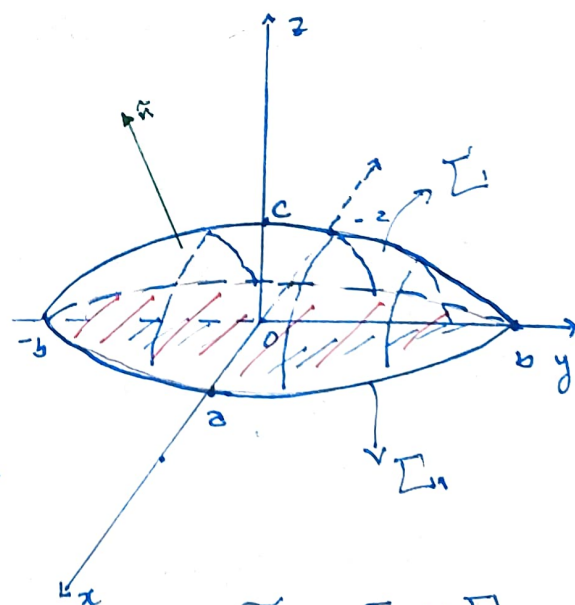
Note que podemos parametrizar la
parte superior del elipsoide usando
una "variación" de ~~las~~ coordenadas esféricas.

$$x = a \cos(\theta) \sin(\varphi)$$

$$y = b \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z = c \cos(\varphi).$$

con $\theta \in [0, 2\pi]$ y
 $\varphi \in [0, \pi/2]$



$$\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup \Sigma_1$$

Parametrización:

$$\tilde{\varphi}(\theta, \varphi) = \left(a \cos(\theta) \sin(\varphi), b \sin(\theta) \sin(\varphi), c \cos(\varphi) \right)$$

Verificación: $\frac{\left(\frac{a^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\varphi)}{a^2} \right)^2 + \frac{b^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\varphi)}{b^2} + \frac{c^2 \cos^2(\varphi)}{c^2}}$

$$= \cos^2(\theta) \sin^2(\varphi) + \sin^2(\theta) \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)$$

$$= \sin^2(\varphi) \underbrace{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}_{=1} + \cos^2(\varphi)$$

$$= \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1 \Rightarrow \text{hemos probado que}$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta}(\theta, \varphi) = \left(-a \sin(\theta) \sin(\varphi), b \cos(\theta) \sin(\varphi), 0 \right)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = \left(a \cos(\theta) \cos(\varphi), b \sin(\theta) \cos(\varphi), -c \sin(\varphi) \right)$$

Normal en el sentido exterior, Para lo requerido por el ejercicio basta considerar $\left(-\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \varphi} \right)$

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \varphi} \right)(\theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a \sin(\theta) \sin(\varphi) & b \cos(\theta) \sin(\varphi) & 0 \\ a \cos(\theta) \cos(\varphi) & b \sin(\theta) \cos(\varphi) & -c \sin(\varphi) \end{vmatrix}$$

Normal Interior

$$= -bc \cos(\theta) \sin^2(\varphi) \hat{i} - ac \sin(\theta) \sin^2(\varphi) \hat{j} + \left(-ab \sin^2(\theta) \sin(\varphi) \cos(\varphi) - ab \cos^2(\theta) \cos(\varphi) \sin(\varphi) \right) \hat{k}$$

$$\int_{\Sigma} \nabla \Phi \cdot dS = \int_{\Sigma} \tilde{\varphi} \cdot \nabla \Phi(\tilde{\varphi}(\theta, \varphi)) \left\| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \varphi} \right\| d\theta d\varphi.$$

$$\int_{\Sigma} \nabla \Phi \left(\begin{pmatrix} 2 \cos(\theta) \sin(\varphi), & b \sin(\theta) \sin(\varphi), & c \cos(\varphi) \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 2 \cos(\theta) \sin(\varphi), & b \sin(\theta) \sin(\varphi), & c \cos(\varphi) \end{pmatrix} \right)$$

$$\cdot \left\| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \varphi} \right\| d\theta d\varphi$$

$$= \int_{\Sigma} \left(2(2 \cos(\theta) \sin(\varphi) + 1), \quad 4(b \sin(\theta) \sin(\varphi) - 1), \quad 2c \cos(\varphi) \right) \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cos(\theta) \sin(\varphi), & b \sin(\theta) \sin(\varphi), & c \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \left\| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \varphi} \right\| d\theta d\varphi.$$

$$= \int_{\Sigma} \left\{ 2 \left(2 \cos(\theta) \sin(\varphi) + 1 \right) 2 \cos(\theta) \sin(\varphi) + 4 b \sin(\theta) \sin(\varphi) \left(b \sin(\theta) \sin(\varphi) - 1 \right) + 2 c^2 \cos^2(\varphi) \right\} \left\| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \varphi} \right\| d\theta d\varphi.$$

Substituya la expresión obtenida anteriormente por $\left\| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \varphi} \right\|$ en la Integral e Intente calcular dicha Integral.
¿Es posible?

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \varphi} \right) (\theta, \varphi) &= -bc \cos(\theta) \sin^2(\varphi) \hat{i} \\ &- 2c \sin(\theta) \sin^2(\varphi) \hat{j} + \left(-2b \sin(\varphi) \cos(\varphi) (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) \right) \hat{k} \\ &- bc \cos(\theta) \sin^2(\varphi) \hat{i} - 2c \sin(\theta) \sin^2(\varphi) \hat{j} - 6a \sin(\varphi) \cos(\varphi). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \varphi} \right\|^2 &= \sqrt{b^2 c^2 \cos^2(\theta) \sin^4(\varphi) + 2^2 c^2 \sin^2(\theta) \sin^4(\varphi)} \\ &+ b^2 2^2 \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi)} \\ &= \sqrt{\sin^4(\varphi) \left(b^2 c^2 \cos^2(\theta) + 2^2 c^2 \sin^2(\theta) \right) + b^2 2^2 \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi)} \\ &= \sin^2(\varphi) \sqrt{(b^2 c^2 \cos^2(\theta) + 2^2 c^2 \sin^2(\theta)) + b^2 2^2 \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi)}. \end{aligned}$$

Note que por más que Intentemos simplificar la expresión $\left\| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \varphi} \right\|$ es bastante compleja cuando substituímos en la Integral,

Por bien, si utilizamos el Teorema de la Divergencia de Gauss, Tenemos que:

$$\iint_{\tilde{\Sigma}} \nabla \Phi \cdot d\mathbf{s} = \iiint_{\text{Int}(\tilde{\Sigma})} \text{div}(\nabla \Phi) \frac{dV}{\downarrow \text{diferencial de volumen } dx dy dz} = \iiint_{\text{Int}(\tilde{\Sigma})} \Delta \Phi \, dV.$$

Verificar ~~que~~^{si} se satisfacen las hipótesis del Teorema de Gauss (Ejercicio).

Ahora bien, una hipótesis del Teorema de Gauss no se satisface con lo discutido hasta ahora (la superficie no es cerrada!)

Consideremos $\tilde{\Sigma}$ la superficie limitada superiormente por el elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ e inferiormente por el plano $z=0$.

El Teorema de Gauss nos dará la información del Flujo saliente que atraviesa la superficie.

$$\text{Flujo elipsoide (saliente)} + \text{Flujo (parte inferior) (saliente)} = \text{Flujo total}$$

$$\text{Como Flujo elipsoide (entrante)} = - \text{Flujo elipsoide (saliente)}$$

$$\Rightarrow \text{Flujo elipsoide (entrante)} = \text{Flujo (parte inferior) (saliente)} - \text{Flujo total}$$

(Ejercicio, terminar los cálculos)