MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Argenis Mendez.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.

Auxiliar 6:Teorema de la Divergencia

Resumen

- [**Superficie**]: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$, la llamaremos *superficie* si existe $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (parametrización) continua tal que $S = \phi(D)$ con D tal que $Int(D) \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio (abierto y conexo).
- Diremos que $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es parametrización:
  - Suave, si es clase $\mathcal{C}^1$.
  - Simple, si es inyectiva.
- [**Vectores Tangentes**]: Se definen los vectores tangentes a S en el punto $\varphi(u_0, v_0)$, mediante:

$$\hat{t}_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} / \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\| \qquad \hat{t}_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|$$

  Y se dirá que φ es regular si $\hat{t}_u, \hat{t}_v$ son linealmente independientes.
- [**Vector normal**]: Definimos el vector normal a S en el punto $\varphi(u_0, v_0)$ a:

$$\hat{n} = \frac{\hat{t}_u \times \hat{t}_v}{\left\| \hat{t}_u \times \hat{t}_v \right\|}$$

  Y con ello el plano tangente al plano generado por $\hat{t}_u, \hat{t}_v$ (normal a $\hat{n}$.
- [**Campo de normales**]: Dado S regular y $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrización regular de S podemos calcular un campo de normales $\hat{n}$ sobre S mediante:

$$\hat{n}(u,v) = \frac{\hat{t}_u(u,v) \times \hat{t}_v(u,v)}{\left\| \hat{t}_u(u,v) \times \hat{t}_v(u,v) \right\|} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\|}$$

- [**Superficie regular orientable**]: Diremos que una superficie regular S está orientada según el campo de vectores normales $\hat{n} : s \to \mathbb{R}^3$ cuando este quede bien definido globalmente como una función continua sobre la superficie.
- [**Área**]: El Área de una superficie S viene dada por:

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\| dudv$$

- [**Integral de Campo Escalar**]: Sea S una superficie orientable y $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ campo escalar continuo sobre $\Omega \subseteq S$. Se define la integral de f a través de la superficies S como:

$$\iint_S f \cdot dS = \iint_D f(\varphi(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\| dudv$$

  Donde φ es parametrización regular de S que respeta orientación.

- **[Integral de Flujo]**: Sea S una superficie orientable, $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ campo de normales continuos sobre S y $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial continuo sobre $\Omega \subseteq S$. Se define la integral de flujo de F a través de la superficies S orientada según $\hat{n}$ por:

$$\iint_S F \cdot \overrightarrow{dA} = \iint_S F \cdot \hat{n} dA = \iint_D F(\varphi(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\right] dudv$$

  Donde φ es parametrización regular de S que respeta orientación.

- **[Observación]**: Si S^- está orientada en el sentido opuesto de S entonces la integral anterior cambia de signo.

- **Teorema de la Divergencia de Gauss.**
  Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un **abierto acotado** cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la **normal exterior**. Sea $\overrightarrow{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase $\boldsymbol{C^1}$** sobre un abierto $U \supseteq \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = \iiint\limits_{\Omega} div(\overrightarrow{F})\, dV$$

Recuerdo Definición de Integral de flujo. Sea S una superficie regular orientable, $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo de normales continuo sobre S, y $\overrightarrow{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo definido sobre un abierto Ω que contiene a S. Se define la integral de flujo del campo $\overrightarrow{F}$ a través de la superficie S orientada según $\hat{n}$ mediante

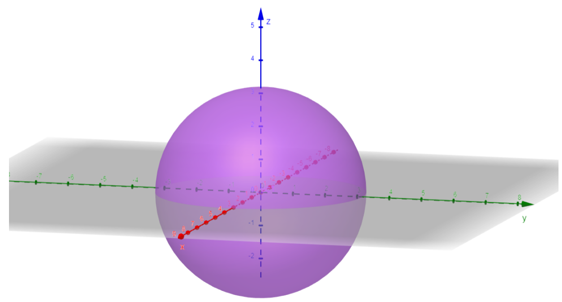
$$\iint\limits_S \overrightarrow{F} \cdot \hat{n}\, dA = \iint\limits_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{\varphi}(u,v)) \cdot \underbrace{\frac{\frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v} \right\|}}_{\hat{n}} \underbrace{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v} \right\| du\, dv}_{dA} = \iint\limits_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{\varphi}(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v}(u,v)\right] du\, dv$$

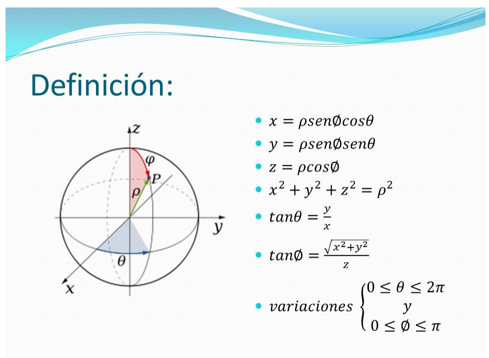
donde $\overrightarrow{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de S compatible con la orientación, esto es tal que

$$\hat{n} = \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v} \Big/ \left\| \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v} \right\|$$

P1.- Verificar el teorema de la divergencia para el campo vectorial $\overrightarrow{F} = |r|\hat{r}$ y la superficie esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$





P2.- Calcular le flujo del campo $F = (0, e^{sen(xz)}, y^2)$ a través del semielipsoide superior $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6, z \geq 0$, con su normal apuntando hacia arriba