

El centroide de una región plana $D \subset \mathbb{R}^2$ se define como el punto (C_1, C_2) cuyas coordenadas vienen dadas por

$$C_1 = \frac{1}{\text{Área}(D)} \iint_D x \, dx \, dy, \quad C_2 = \frac{1}{\text{Área}(D)} \iint_D y \, dx \, dy$$

Supuesto que D es la región limitada por un camino cerrado simple, se justifique que

$$C_1 = \frac{1}{2\text{Área}(D)} \int_{\partial} x^2 \, dy, \quad C_2 = -\frac{1}{2\text{Área}(D)} \int_{\partial} y^2 \, dx.$$

(a) Calcule el centroide del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, y $(0,1)$.

(b) Calcule el centroide de un semicírculo de Radio R .

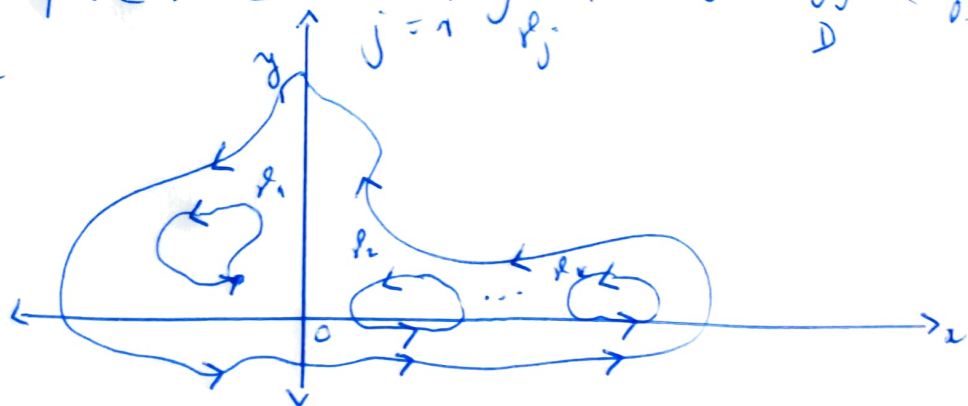
Teorema de Green (para dominios con agujeros)

Sea $F(x,y) = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j}$ un campo de vectores definido en un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Sean $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ curvas cerradas simples en A disjuntas dos a dos tales que:

- ① $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ se encuentran en el interior de γ
- ② γ_i se encuentra en el exterior de γ_j para $i \neq j$
- ③ Todas las curvas $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ es bien orientadas positivamente (sentido antihorario)

Sea D la región obtenida por la Intersección del Interior de γ con el exterior de cada una de las curvas $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$. En estas hipótesis se verifica que

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} F \cdot d\gamma_j = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dx dy$$



Teorema de Stokes

El Teorema de Stokes afirma que el flujo del rotacional de un campo a través de una superficie suave y orientable a trozos es igual a la circulación del campo en el Borde de la misma.

Teorema de Stokes Sea S una superficie suave y orientable a trozos con una orientación definida por el campo de vectores normales unitarios $n(x,y,z)$ y representemos por ∂S^+ el borde de S con la orientación inducida. Sea F un campo Vectorial de clase C^1 definido en un abierto que contenga a S . Entonces se verifica que

$$\int_{\partial S^+} F \cdot dr = \iint_S \text{rot}(F) \cdot n \, dS$$

Nótese que el Teorema de Green es un caso particular del Teorema de Stokes.

Supongamos que nuestra superficie es un dominio plano D contenido en el plano XY y que la orientación por la normal al plano XY en la dirección del eje z positivo. Es claro que en esta situación la normal unitaria es $\hat{e} = (0, 0, 1)$ y que el borde D con la orientación inducida es precisamente el borde de D orientado positivamente (en el sentido que vimos al estudiar el Teorema de Green) que representamos por ∂D^+ . Sea

$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ un campo vectorial

definido en D . Aplicando el Teorema de Stokes

al campo vectorial $F_3(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), 0)$

obtenemos

$$\int_{\partial D^+} F_3 \cdot dr = \iint_D \text{rot}(F_3) \cdot k \, ds$$

es claro que
$$\int_{\partial D^+} \vec{F}_3 \cdot d\vec{r} = \int_{\partial D^+} P(x,y) dx + Q(x,y) dy$$

o otro lado tenemos que

$$\text{rot}(\vec{F}_3)(x,y,z) \cdot \hat{k} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$

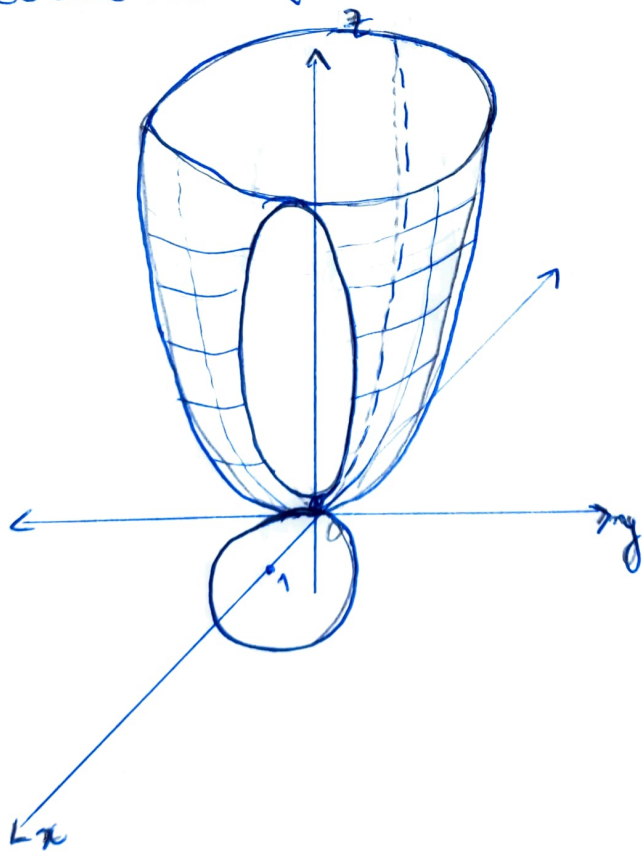
concluimos que

$$\int_{\partial D^+} P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dx dy.$$

Ejemplos:

Sea S la parte del paraboloides $z = x^2 + y^2$ que queda ~~abajo~~ el plano $z = 2x$, y sea r la curva Intersección de ambos. Calcular la circulación del campo vectorial $F(x, y, z) = (z, x, y)$ a lo largo de r .

- (a) Usando el Teorema de Stokes (considera S orientada por la normal con componente $z > 0$).
- (b) Directamente (considera la orientación apropiada para r).



La superficie del paraboloide es una gráfica que tiene como ecuaciones paramétricas $\Gamma(x,y) = (x,y, x^2+y^2)$.

Sea S la parte de dicha superficie que queda bajo el plano $z=2x$.

Note que $(x,y, x^2+y^2) \in S$ siempre que $x^2+y^2 \leq 2x$, lo que equivale a que $(x-1)^2+y^2 \leq 1$, por lo que las ecuaciones paramétricas de S son:

$$\Gamma(x,y) = (x,y, x^2+y^2), \quad (x,y) \in \Omega.$$

donde $\Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 2x\}$ (Disco de centro $(0,1)$ en el plano xy y de radio 1.)

$$\bullet \quad \frac{\partial \Gamma(x,y)}{\partial x} = (1, 0, 2x)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial \Gamma(x,y)}{\partial y} = (0, 1, 2y).$$

$$\frac{\partial \Gamma(x,y)}{\partial x} \times \frac{\partial \Gamma(x,y)}{\partial y} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1). \quad (1).$$

3a componente z es positiva.

Con la orientación adecuada para el Teorema de Stokes afirma que

$$\int_r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Note que $\text{rot}(\mathbf{F}) = (1, 1, 1)$. Así pues,

$$\iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Omega} (1, 1, 1) \cdot (-2x, -2y, 1) dx dy$$

$$= \iint_{\Omega} (1 - 2x - 2y) dx dy$$

$$= \pi - 2 \iint_{\Omega} (x + y) dx dy = \pi - 2 \iint_B (\cos(\theta) + \sin(\theta)) \rho^2 d\rho d\theta$$

$$\begin{aligned} \text{donde } B &= \{(\rho, \theta) \mid (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \in \Omega\} \\ &= \{(\rho, \theta) \mid \rho \leq 2 \cos(\theta), -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\} \end{aligned}$$

$$\text{Así, } \iint_S \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \pi - 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_0^{2 \cos(\theta)} (\cos(\theta) + \sin(\theta)) \rho^2 d\rho \right] d\theta$$

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(\theta) + \sin(\theta)) \cos^2(\theta) d\theta$$

$$T = \frac{16}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(\theta) d\theta = -\pi.$$

3) Las dos superficies el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2x$, tienen la misma altura en los puntos del plano xy que verifican la igualdad $x^2 + y^2 = 2x$, o, lo que es lo mismo, $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Por tanto la curva intersección de dichas superficies es el conjunto de puntos

$$\{(x, y, z) \mid (x-1)^2 + y^2 = 1, z = 2x\}$$

Pongamos $x-1 = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$, con lo que la condición $(x-1)^2 + y^2 = 1$, se satisface automáticamente, y obtenemos que la curva viene dada por

$$r(\theta) = (1 + \cos(\theta), \sin(\theta), 2 + 2\cos(\theta)), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Esta curva tiene la orientación antihoraria que es la inducida por la normal (1), pues al recorrerla con la cabeza apuntando en la dirección de dicha normal (es decir, andando por encima del plano y empezando a subir por el lado de la izquierda) la superficie S queda a nuestra izquierda.

$$\begin{aligned}\int_r \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^{2\pi} (2 + 2\cos(t))^{3/2} (1 + \cos(t), \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t), -2\sin(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2\sin(t) - 2\sin(t)\cos(t) + \cos(t) + \cos^2(t) - 2\sin^2(t)) dt \\ &= -\int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = -\pi.\end{aligned}$$

Ejercicio: Sea S la ~~superficie~~ parte del cilindro parabólico $z = 3 - 2x^2$ que queda por encima del paraboloide $z = x^2 + 3y^2$, y sea r la curva intersección de ambos. Calcule la circulación del campo $\vec{F}(x, y, z) = (-yz, xz, xy)$ a lo largo de r .

Directamente (considera la orientación apropiada por r)

(b) Usando el Teorema de Stokes (considera S orientada por la normal con componente $z > 0$).