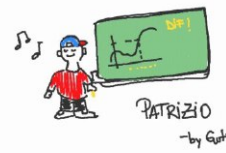




MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Argenis Mendez.

Auxiliar: Patricio Yáñez A.



Auxiliar 4: Integrales de Superficie y Cálculo Vectorial

Resumen

- **[Superficie]:** Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$, la llamaremos *superficie* si existe $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (parametrización) continua tal que $S = \phi(D)$ con D tal que $\text{Int}(D) \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio (abierto y conexo).
- Diremos que $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es parametrización:
 - Suave, si es clase $\mathcal{C}^1$.
 - Simple, si es inyectiva.

- **[Vectores Tangentes]:** Se definen los vectores tangentes a S en el punto $\varphi(u_0, v_0)$, mediante:

$$\hat{t}_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} / \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\| \quad \hat{t}_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|$$

Y se dirá que φ es regular si $\hat{t}_u, \hat{t}_v$ son linealmente independientes.

- **[Vector normal]:** Definimos el vector normal a S en el punto $\varphi(u_0, v_0)$ a:

$$\hat{n} = \frac{\hat{t}_u \times \hat{t}_v}{\|\hat{t}_u \times \hat{t}_v\|}$$

Y con ello el plano tangente al plano generado por $\hat{t}_u, \hat{t}_v$ (normal a $\hat{n}$).

- **[Campo de normales]:** Dado S regular y $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización regular de S podemos calcular un campo de normales $\hat{n}$ sobre S mediante:

$$\hat{n}(u, v) = \frac{\hat{t}_u(u, v) \times \hat{t}_v(u, v)}{\|\hat{t}_u(u, v) \times \hat{t}_v(u, v)\|} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\|}$$

- **[Superficie regular orientable]:** Diremos que una superficie regular S está orientada según el campo de vectores normales $\hat{n} : s \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuando este quede bien definido globalmente como una función continua sobre la superficie.
- **[Área]:** El Área de una superficie S viene dada por:

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

- **[Integral de Campo Escalar]:** Sea S una superficie orientable y $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar continuo sobre $\Omega \subseteq S$. Se define la integral de f a través de la superficies S como:

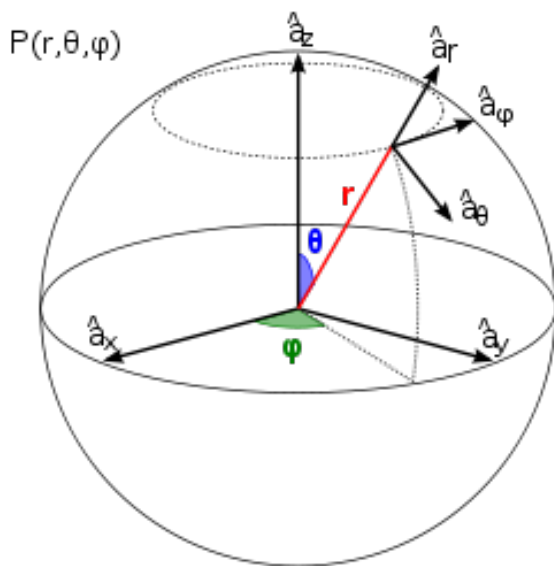
$$\iint_S f \cdot dS = \iint_D f(\varphi(u, v)) \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

Donde φ es parametrización regular de S que respeta orientación.

P1.- Considere la semisuperficie esférica unitaria superior, luego la siguiente parametrización

$$x(u, v) = \sin(u)\cos(v), y(u, v) = \sin(u)\sin(v), z(u, v) = \cos(u)$$

- Determine donde vive u, v y sepa que son vectores ortogonales, calcule $\|r_u \times r_v\|$ y bajo la parametrización en cartesianas, pero en dos variables con $(x, y) \in B$, círculo de unidad, calcule $\|r_x \times r_y\|$.
- Hallar la integral $f(x, y, z) = z^2$ sobre la superficie semiesférica unitaria y verifique la integral de superficie con el resultado usual.



P2.- a) Encuentre una expresión para el vector normal de la superficie dada por:

$$x = \cos \alpha \sin \beta \quad y = \sin \alpha \sin \beta \quad z = \cos \beta$$

con $\alpha \in [0, 2\pi]$ y $\beta \in [0, \pi]$.

b) Encuentre una expresión para el vector normal de la superficie dada por:

$$x = \sin \gamma \quad y = \mu \quad z = \cos \gamma$$

con $\gamma \in [0, 2\pi]$ y $\mu \in [-1, 3]$.

c) ¿Qué puede decir de la regularidad de las superficies?

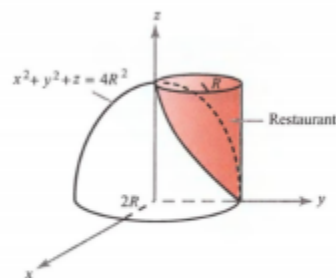
P3.- a) Encuentre el área de la superficie definida por $S = \{x^2 + y^2 \leq 2; z = xy\}$

b) Calcule el área del parche de superficie $S = \{0 < x_1 < x_2, 0 < x_2 < 1, x_3 = \cosh x_1\}$

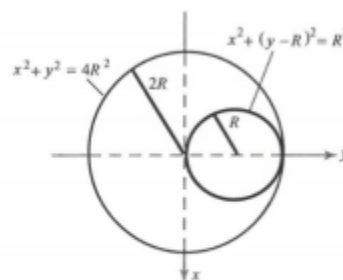
c) Sea $\phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$ y sea D el disco unitario en el plano (u, v) . Encuentre el área de $\phi(D)$.

d) El cilindro $x^2 + y^2 = x$ en $\mathbb{R}^3$ divide la esfera unitaria en dos secciones. S_1 lo que está dentro del cilindro y S_2 lo que está fuera de él. Encuentre el valor de $\frac{A(S_2)}{A(S_1)}$.

P4.- Están construyendo un restaurante en la ladera de la montaña. Los planos del arquitecto se muestran a continuación:



Vista lateral



Vista superior

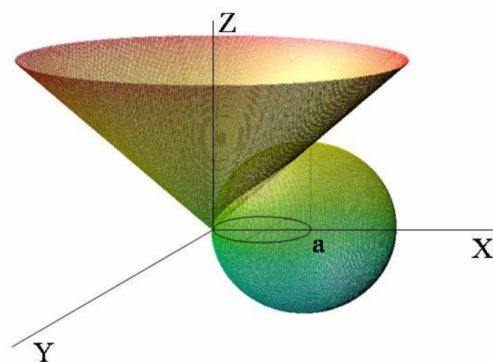
- Parametrice la superficie del restaurante. Considere R como conocido.
- La pared vertical curvada del restaurante será hecha de vidrio. ¿Cuánto vidrio se necesitará? Es decir, ¿Cuál será el área de esta pared?

P5.- Calcule el área de la porción de superficie cónica

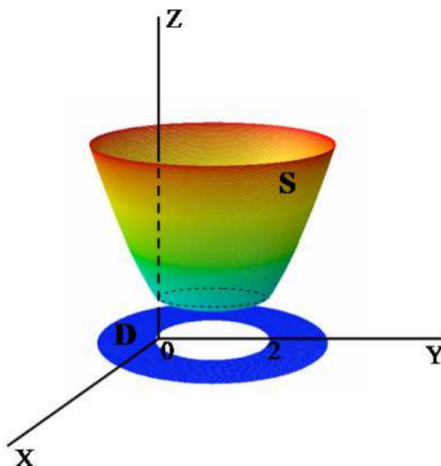
$$x^2 + y^2 = z^2$$

situada por encima del plano $z = 0$ y limitada por la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$$



P6.- Halle el área de la porción de la superficie $z = x^2 + (y - 1)^2$ comprendida entre los planos $z = 1$ y $z = 4$



Ejercicios Propuestos

P7.- Problema Fundamental de la marraqueta [1=2=4]

Había una vez el mundo de los marraquetoides, donde la reina Marraqueta, se enfrentó a todo aquel subdito quien le negaba la cantidad que era un pan frances, batido o marraqueta.

para salir del conflicto bélico que ya hapia debastado a varias familias y generaciones decidió contratar a los mejores matemáticos y matemáticas del mundo (ustedes son secos y secas po, no lo olviden, les irá bacán < 3), para que le respondieran las siguientes preguntas y dieran por cerrado el caso que acabó con Media Narnia, Pueblo Paleta, Springfield, Rancagua y Macondo.

- ¿Cuánto es una marraqueta?
- Utilizando dos cilindros, un paralelepipedo y un paraboloide, a través de uniones e intersecciones genere el conjunto de los puntos que su volumen tienen la forma geométrica de una marraqueta.
- Utilizando métodos de integración estime (puede dar sus medidas, pero debe ser consistente) la superficie crujiente de una marraqueta.

Hint: Usar integral de superficie, y parametrizar convenientemente.



P8.- Se definen las **coordenadas esferoidales prolato** (ξ, η, ϕ) mediante

$$x = a \sinh(\xi) \sin(\eta) \cos(\phi), \quad y = a \sinh(\xi) \sin(\eta) \sin(\phi), \quad z = a \cosh(\xi) \cos(\eta)$$

donde $\xi > 0$, $\eta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Verifique que este sistema de coordenadas es ortogonal, y calcule la divergencia, el laplaciano, y el rotor en estas coordenadas.

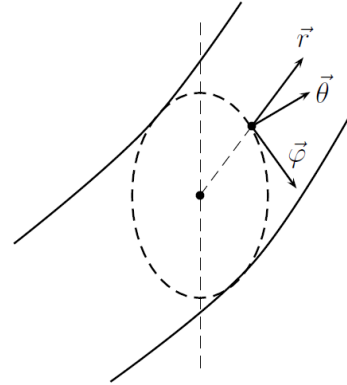
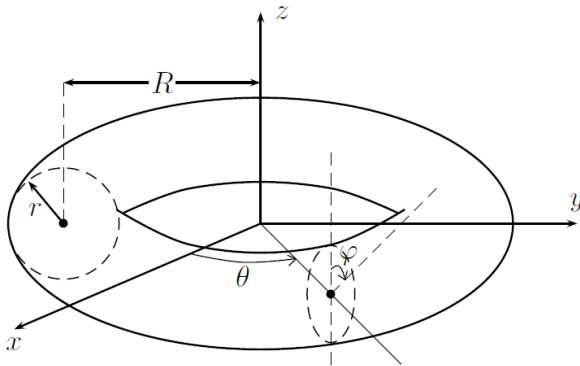
P9.- Se definen las **coordenadas toroidales** (r, φ, θ) mediante

$$x = (R + r \sin(\varphi)) \cos \theta, \quad y = (R + r \sin(\varphi)) \sin \theta, \quad z = r \cos(\varphi)$$

donde $r \in [0, R]$, $\varphi, \theta \in [0, 2\pi)$.

a) Verifique que este sistema de coordenadas es ortogonal, y calcule la divergencia, el laplaciano, y el rotor en estas coordenadas.

b) Piense y proponga una forma de parametrizar un toroide de la siguiente característica $\Gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$



Auxiliar 4: Integrales de Superficie y Cálculo Vectorial

Resumen

• [Superficie]: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$, la llamaremos *superficie* si existe $\phi: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (parametrización) continua tal que $S = \phi(D)$ con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio (abierto y conexo).

• Diremos que $\phi: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es parametrización:

- Suave, si es clase C^1 .
- Simple, si es inyectiva.

• [Vectores Tangentes]: Se definen los vectores tangentes a S en el punto $\phi(u_0, v_0)$, mediante:

$$\vec{t}_u = \frac{\partial \phi}{\partial u} \Big|_{(u_0, v_0)} \quad \vec{t}_v = \frac{\partial \phi}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)}$$

Y se dirá que ϕ es regular si $\vec{t}_u, \vec{t}_v$ son linealmente independientes.

• [Vector normal]: Definimos el vector normal a S en el punto $\phi(u_0, v_0)$ a:

$$\vec{n} = \frac{\vec{t}_u \times \vec{t}_v}{\|\vec{t}_u \times \vec{t}_v\|}$$

Y con ello el plano tangente al plano generado por $\vec{t}_u, \vec{t}_v$ (normal a $\vec{n}$).

• [Campo de normales]: Dado S regular y $\phi: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrización regular de S podemos calcular un campo de normales $\vec{n}$ sobre S mediante:

$$\vec{n}(u, v) = \frac{\vec{t}_u(u, v) \times \vec{t}_v(u, v)}{\|\vec{t}_u(u, v) \times \vec{t}_v(u, v)\|} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right\|}$$

• [Superficie regular orientable]: Diremos que una superficie regular S está orientada según el campo de vectores normales $\vec{n}: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuando este quede bien definido globalmente como una función continua sobre la superficie.

• [Área]: El Área de una superficie S viene dada por:

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

• [Integral de Campo Escalar]: Sea S una superficie orientable y $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar continuo sobre $\Omega \subseteq S$. Se define la integral de f a través de la superficies S como:

$$\iint_S f \cdot dS = \iint_D f(\phi(u, v)) \cdot \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

Donde ϕ es parametrización regular de S que respecta orientación.

1

P1.- Considere la semisuperficie esférica unitaria superior, luego la siguiente parametrización

$$x(u, v) = \sin(u) \cos(v), y(u, v) = \sin(u) \sin(v), z(u, v) = \cos(u)$$

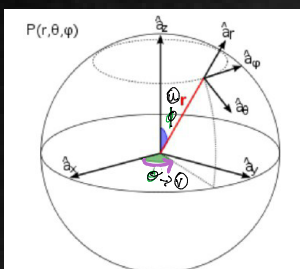
a) Determine donde vive u, v y sepa que son vectores ortogonales, calcule $\|r_u \times r_v\|$ y bajo la parametrización en cartesianas, pero en dos variables con $(x, y) \in B$, círculo de unidad, calcule $\|r_x \times r_y\|$.

b) Hallar la integral $f(x, y, z) = z^2$ sobre la superficie semiesférica unitaria y verifique la integral de superficie con el resultado usual.

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \sin(u) \cos(v) & \# \text{ Esferas} \\ Y(u, v) &= \sin(u) \sin(v) & r(\theta, \phi) \\ Z(u, v) &= \cos(u) & r(u, v) \end{aligned}$$

$\vec{F}_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

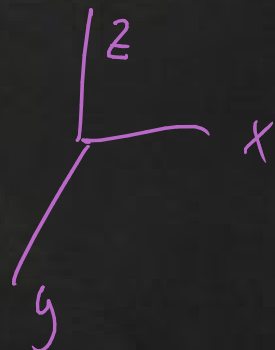
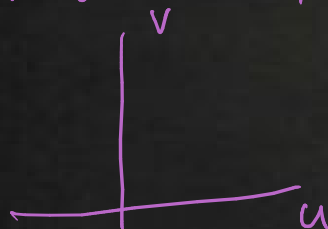
cuál es el factor de escala de esferas
Factor de escala de $r(u, v)$ $\downarrow$ $\rho^2 \sin \theta$
 $\uparrow$ solo parte de arriba, si nos dicen que $\theta \rightarrow v$
 $\phi \rightarrow u$
¿dónde vive v, u ?



$$v \in [0, 2\pi] \quad u \in [0, \pi/2] \quad \text{luego} \quad \left\| \frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial v} \right\|$$

Escribiré $r(u, v) = (\sin(u) \cos(v), \sin(u) \sin(v), \cos(u))$

$$\vec{F}(u, v) \rightarrow (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v))$$



$$\|r_u \times r_v\|$$

$$\vec{F}(u, v) = (\sin(u) \cos(v), \sin(u) \sin(v), \cos(u))$$

$$\frac{\partial \vec{F}(u, v)}{\partial u} = (\cos(u) \cos(v), \cos(u) \sin(v), -\sin(u))$$

$$\frac{\partial \vec{F}(u, v)}{\partial v} = (-\sin(u) \sin(v), \sin(u) \cos(v), 0)$$

1

$$\vec{r}(u, v) = (\sin(u) \cos(v), \sin(u) \sin(v), \cos(u))$$

$$\frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} = (\cos(u) \cos(v), \cos(u) \sin(v), -\sin(u))$$

$$\frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} = (-\sin(u) \sin(v), \sin(u) \cos(v), 0)$$

$$\begin{aligned} \cos(u) &= c(u) \\ \sin(u) &= s(u) \end{aligned}$$

$$r_u \times r_v = \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ c(u)c(v) & c(u)s(v) & -s(u) \\ -s(u)s(v) & s(u)c(v) & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \text{ fila vectores tangen} \\ \leftarrow 2 \text{ fila } r_u \\ \leftarrow 3 \text{ fila } r_v \end{array}$$

$$= \hat{i} (c(u)s(v) \cdot 0 - -s^2(u)c(v))$$

$$- \hat{j} (c(u)c(v) \cdot 0 - s^2(u)s(v))$$

$$+ \hat{k} (c(u)s(u)c^2(v) + c(u)s(u)s^2(v))$$

$$= \hat{i} s^2(u)c(v) + \hat{j} s^2(u)s(v) + \hat{k} \cos(u) \sin(u) [c^2(v) + s^2(v)]$$

$$= \hat{i} s^2(u)c(v) + \hat{j} s^2(u)s(v) + \hat{k} \cos(u) \sin(u) \cdot 1$$

$$= s(u) (s(u)c(v), s(u)s(v), c(u)) = r_u \times r_v$$

$$\Rightarrow \|r_u \times r_v\| = \sin(u) \sqrt{s^2(u)c^2(v) + s^2(u)s^2(v) + c^2(u)}$$

$$u \in [0, \pi/2] \Rightarrow \sin(u) \geq 0 \Rightarrow \sin(u) \sqrt{s^2(u)c^2(v) + s^2(u)s^2(v) + c^2(u)} = \sin(u)$$

Que pasaba en es f'rica, factores escala $\rho^2 \sin(\phi)$ $\downarrow$
En potencias si $\rho=1$ f.e. $\sin(u)$

$$u \rightarrow \phi \quad \rho^2 \sin(\phi) \rightarrow \sin(u) = \rho^2 \sin(u), \quad \rho=1$$

(2)

Nota $r_u \neq t(u, v)$
 $r_u = \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u}$



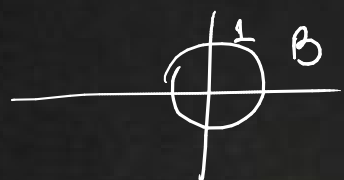
fcfm

Ingeniería Matemática
 FACULTAD DE CIENCIAS
 FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
 UNIVERSIDAD DE CHILE

a) Determine donde vive u, v y sepa que son vectores ortogonales, calcule $\|r_u \times r_v\|$ y bajo la parametrización en cartesianas, pero en dos variables con $(x, y) \in B$, círculo de unidad, calcule $\|r_x \times r_y\|$.

b) Hallar la integral $f(x, y, z) = z^2$ sobre la superficie semiesférica unitaria y verifique la integral de superficie con el resultado usual.

$(x, y) \in B$



Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Cartesianas (x, y, z)

↓
no te quiero

$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ # va bien así,

$(x, y, z) \rightarrow (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) = \vec{r}(x, y)$

$r_x = \frac{\partial \vec{r}(x, y)}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{1 \cdot -2x}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right) = \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right)$

$r_y = \frac{\partial \vec{r}(x, y)}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{1 \cdot -2y}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right) = \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right)$

$r_x \times r_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \end{vmatrix} = \hat{i} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \hat{j} \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \hat{k} \cdot 1$
 $= r_x \times r_y$

$\|r_x \times r_y\| = \sqrt{\frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2} + 1}$; $1 = \frac{1 - x^2 - y^2}{1 - x^2 - y^2}$
 $= \sqrt{\frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{1 - x^2 - y^2}{1 - x^2 - y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

3

La parte a nos decía

$$\|r_u \times r_v\| = \sin(u)$$

$$\|r_x \times r_y\| = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$h_p h_\theta h_\phi = \|r_u \times r_v\|$$

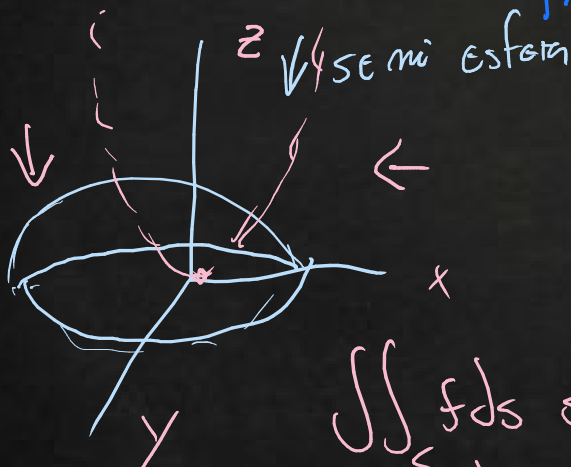
b) Hallar la integral $f(x, y, z) = z^2$ sobre la superficie semiesférica unitaria y verifique la integral de superficie con el resultado usual.



Teoría Sea S superficie C^1
 $r: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ inyectivo ; $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ Juanito
 con $f(r(u, v))$ continua

$$\iint_S f ds = \iint_D f(r(u, v)) \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du dv$$

$f(x, y, z) = z^2$ Juanito
 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $r(u, v) = (\dots, \dots, \dots)$ Juanito



$f \equiv 1$ $(x, y) \in B \odot_1$

$$\int_S ds = A(S)$$

$\iint_S f ds$ será la cantidad de superficie de la parametrización en vuelta o bajo $f(x, y, z)$

$$f(x, y, z) = z^2; \quad ||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|| = \sin(u) \quad (1)$$

$$(2) \quad ||\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|| = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

• [Integral de Campo Escalar]: Sea S una superficie orientable y $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ campo escalar continuo sobre $\Omega \subseteq S$. Se define la integral de f a través de la superficie S como:

$$\iint_{\Omega} f \cdot dS = \iint_{\Omega} f(\varphi(u, v)) \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) ||\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|| du dv$$

$$\mathbf{r}(u, v) = (\sin(u) \cos(v), \sin(u) \sin(v), \cos(u)) ; \quad z = \cos(u)$$

$$f(\mathbf{r}(u, v)) = \cos^2(u) \quad \downarrow (1) \text{ y } (2)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2(u) \cdot \sin(u) \cdot 1 du dv \quad \text{Fubini}$$

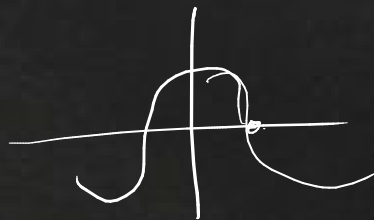
$$= \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi/2} \cos^2(u) \sin(u) du$$

$$= \left. -\frac{\cos^3(u)}{3} \right|_0^{\pi/2} = -\cos^2(u) \cdot \frac{3}{3} - \sin(u)$$

$$= \cos^2(u) \sin(u)$$

$$= 2\pi \cdot \left[-\frac{0^3}{3} + \frac{\cos^3(0)}{3} \right]$$

$$= \frac{2\pi}{3} //$$



TPCAA = TODOS
 PASAMOS
 CALCULO AA

Esto fátó !!



com $\|r_x \times r_y\| = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$; $f(x,y,z) = z^2$
 $r(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$

Luego $\iint_S f ds = \iint_B f(r) \|r_x \times r_y\| du dv$

$\Rightarrow \underbrace{z^2}_{z} = 1 - x^2 - y^2$
 B es $\odot$ unitario

$$= \iint_B (1-x^2-y^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy$$

Luego haremos un cambio de variable a polares $\rho \in [0,1]$
 Pues unitario! Polares; cuando cambio variable, factor escala.

$$= \iint_B \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho d\theta$$

$\downarrow$ Fubini

$$x^2+y^2=\rho^2$$

$$h_\theta h_\rho = \rho \cdot 1$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho$$

$$= \theta \Big|_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{-(1-\rho^2)^{3/2}}{3} \right] \Big|_0^1$$

$$\left[\frac{-(1-\rho^2)^{3/2}}{3} \right]' = \sqrt{1-\rho^2} \rho$$

$$= 2\pi \cdot \left[0 + \frac{1}{3} \right] = \frac{2\pi}{3} //$$

área semi es $4\pi t^2$; si es la mitad

$$\frac{4\pi t^2}{2} = 2\pi t^2 ; \text{ si } t=1$$

$$= 2\pi //$$

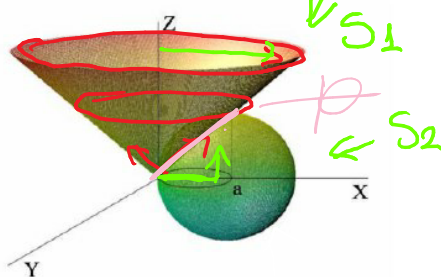
(6)

P5.- Calcule el área de la porción de superficie cónica

$$x^2 + y^2 = z^2 \rightarrow \text{elipsoide}$$

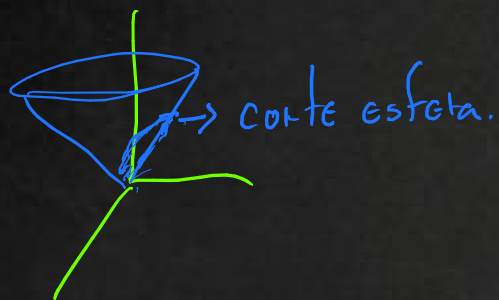
situada por encima del plano $z = 0$ y limitada por la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$$



$$x^2 + y^2 = z^2 = z^2$$

$$0 < z = z \text{ identidad}$$



$$\begin{aligned} 1) & x^2 + y^2 + z^2 = 2ax \quad \text{esfera} \\ 2) & x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{aligned}$$

$$1) + 2) \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 2ax$$

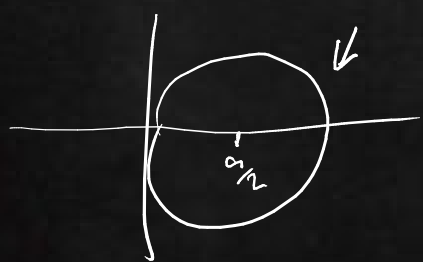
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = ax$$

$$\Leftrightarrow x^2 - ax + 0 + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + y^2 = 0 \Rightarrow 2cd = -ax$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Esto es la intersección entre superficies



yo de finite'

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4} \}$$



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4} \}$$

$$S = r(D)$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Enunciado $\Rightarrow$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



fcfm

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$$r(x, y) = (x, y, z = \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\forall x, y \in D \rightarrow \text{radio } \frac{a}{2}$$

[Área]: El Área de una superficie S viene dada por:

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \left\| \frac{\partial r}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \|r_x \times r_y\| du dv$$

$$r(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\Rightarrow r_x = (1, 0, \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}) \Rightarrow r_x \times r_y =$$

$$r_y = (0, 1, \frac{1 \cdot 2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}})$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow r_x \times r_y = -\hat{i} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \hat{j} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \hat{k} \cdot 1$$

$$\|r_x \times r_y\| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} = \sqrt{2}$$

$$r(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$$

pasemos a
polares

Factor de
Escala

$$\iint_D \sqrt{2} du dv$$

$$= \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \cdot \rho d\theta d\rho$$

fubim

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$\rho \in [0, \frac{a}{2}]$$

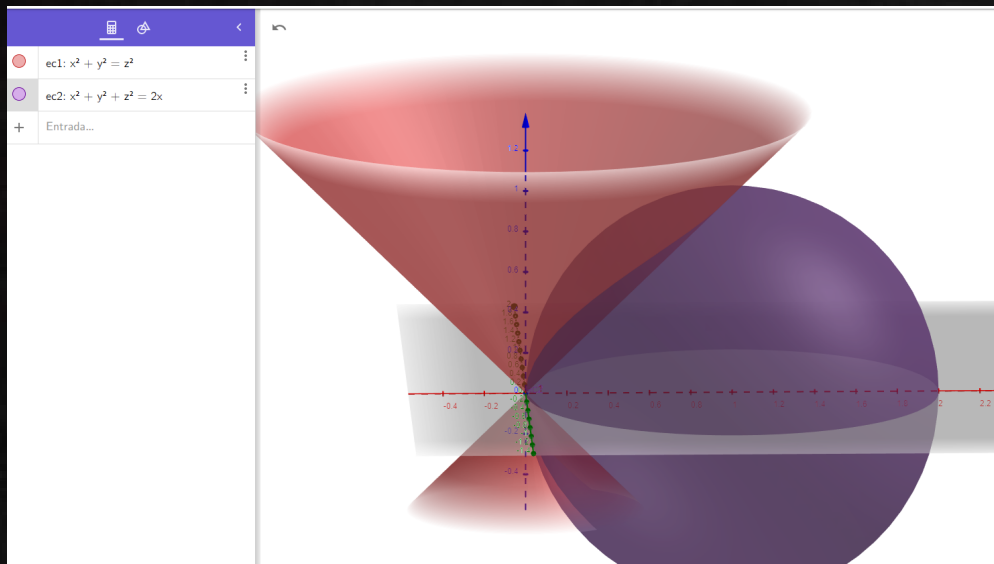
$$h_\rho h_\theta h_\phi = \|r_u \times r_v\|$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\frac{a}{2}} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \sqrt{2} \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{\frac{a}{2}} \cdot \theta \Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi$$

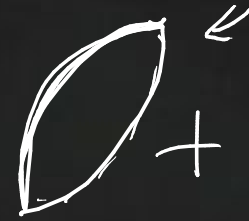
$$= \frac{a^2}{4} \pi \sqrt{2}$$

8

lo que calculamos es la superficie de intersección



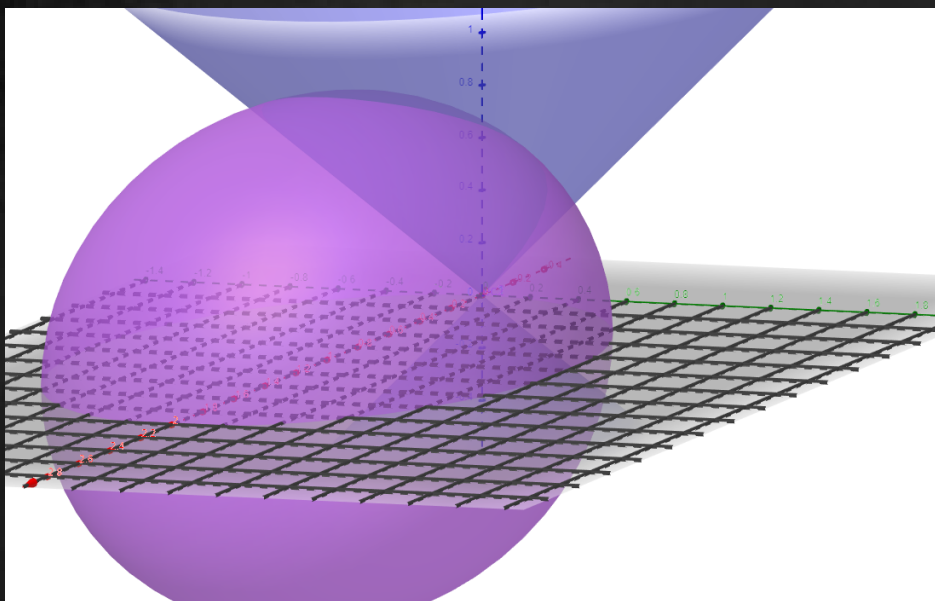
superficie del volumen de intersección.



parte interior

de $x^2 + y^2 = z^2$

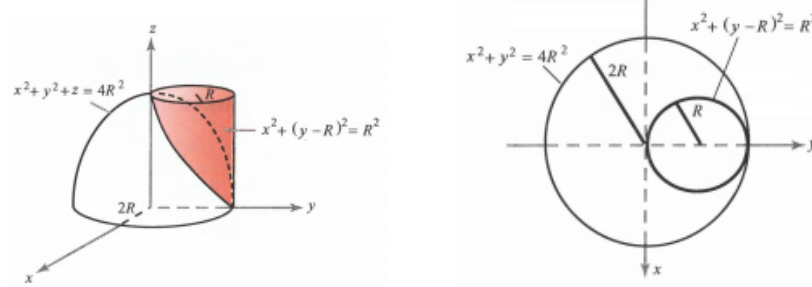
- Otra cara para poder ver la superficie.



Para superficies receta del Chef Lingüini

- 1) Identificar ecuaciones. y superficies
- 2) intersectar para encontrar D ;
conjunto donde f va bajarse.
- 3) Recordar $\iint_S f \, ds = \iint_D f(\mathbf{r}^2) \underbrace{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}_{\text{factor}} \, du \, dv$
- 4) Calcular $\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|$
- 5) Reemplazar; integrar (**Fubini**) podem
rotar
↙
- 6) Cambio de variable (Coordenadas) para que
sea más fácil ↘
- 7) Evaluar, interpretar
- 8) It por una cerveza, pues se acabó.

Pregunta 3. Considere las siguientes superficies. La figura de la izquierda es una vista lateral, mientras que la figura de la derecha es una vista superior de las superficies.



(a) Parametrice la superficie sombreada en la figura. Considere R como conocido.

Solución: La superficie se puede descomponer en 3 superficies, S_1 : tapa superior, S_2 : porción del manto del cilindro que queda fuera del paraboloide y S_3 porción del paraboloide dentro del cilindro.

Se debe parametrizar cada una de las 3 superficies que forman la superficie total:

- S_1 : Es un círculo de radio R horizontal, a una altura $4R^2$ (reemplazar $x = y = 0$ en la ecuación del paraboloide).

Se utilizarán coordenadas cilíndricas desplazadas en la ecuación del círculo $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ (ver vista superior), el cambio sería: $x = \rho \cos(\theta)$, $y - R = \rho \sin(\theta)$, $z = 4R^2$. Con lo cual la parametrización es:

$$\vec{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta) + R, 4R^2), \quad \rho \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi]$$

- S_2 : Es la porción del manto del cilindro $x^2 + (y - R)^2 = R^2$, $z \in [0, 4R^2]$ que queda fuera del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 4R^2$. Entonces deben imponerse las siguientes condiciones

$$\begin{cases} x^2 + (y - R)^2 = R^2 & \text{(en el cilindro)} \\ x^2 + y^2 + z \geq 4R^2 & \text{(fuera del paraboloide)} \\ 0 \leq z \leq 4R^2 & \text{(alturas mínimas y máximas)} \end{cases}$$

En cilíndricas desplazadas esto sería (por la primera relación):

$$(x, y, z) = (R \cos(\theta), R \sin(\theta) + R, z)$$

Pero lo difícil es determinar el rango de variación de estas variables. Claramente $\theta \in [0, 2\pi]$.

Reemplazando x e y en la inecuación del paraboloide se tiene:

$$(R \cos(\theta))^2 + (R \sin(\theta) + R)^2 + z \geq 4R^2 \Leftrightarrow z \geq 2R^2(1 - \sin(\theta)).$$

Y además $0 \leq z \leq 4R^2$. Juntando las desigualdades para z , se tiene $z \in [2R^2(1 - \sin \theta), 4R^2]$. en resumen, la parametrización sería:

$$\vec{r}(\theta, z) = (R \cos(\theta), R \sin(\theta) + R, z), \quad \theta \in [0, 2\pi], z \in [2R^2(1 - \sin \theta), 4R^2]$$

- S_3 : Es la porción del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 4R^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + (y - R)^2 = R^2$, $z \in [0, 4R^2]$. Entonces deben imponerse las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 4R^2 & \text{(en paraboloide)} \\ x^2 + (y - R)^2 \leq R^2 & \text{(dentro del cilindro)} \\ 0 \leq z \leq 4R^2 & \text{(alturas mínimas y máximas)} \end{cases}$$

Queda propuesto parametrizar utilizando coordenadas cilíndricas usuales, es decir,

$$(x, y, z) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z)$$

Notar que con esto la ecuación del paraboloide es $\rho^2 + z = 4R^2$ y la inecuación '*dentro del cilindro*' es $\rho \leq 2R \sin \theta$, con lo cual:

$$\vec{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), 4R^2 - \rho^2), \quad \rho \in [0, 2R \sin \theta], \quad \theta \in [0, \pi]$$

Notar que es correcto que $\theta \in [0, \pi]$ ya que estamos en el semiplano $y \geq 0$ (ver vista superior de la figura).

- (b) Calcule el área de la superficie del manto de cilindro que queda fuera del paraboloide de la figura.

Solución: El área pedida es la superficie S_2 , que fue parametrizada en la parte (a)

$$\vec{r}(\theta, z) = (R \cos(\theta), R \sin(\theta) + R, z), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [2R^2(1 - \sin \theta), 4R^2]$$

Con eso el área de búsqueda directamente es:

$$\begin{aligned} A(S_2) &= \iint_{S_2} dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{2R^2(1-\sin \theta)}^{4R^2} R dz d\theta \\ &= R \int_0^{2\pi} (4R^2 - 2R^2(1 - \sin \theta)) d\theta \\ &= 2R^3 \int_0^{2\pi} (1 + \sin \theta) d\theta \\ &= 4\pi R^3 \end{aligned}$$

Nota: Recordar que en este caso: $dA = \left\| \frac{d\vec{r}}{d\theta} \times \frac{d\vec{r}}{dz} \right\| dz d\theta$.

En general para una superficie parametrizada por $\vec{\varphi}(u, v)$, $dA = \left\| \frac{d\vec{\varphi}}{du} \times \frac{d\vec{\varphi}}{dv} \right\| du dv$.