MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Argenis Mendez.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.

Auxiliar 4: Integrales de Superficie y Cálculo Vectorial

Resumen

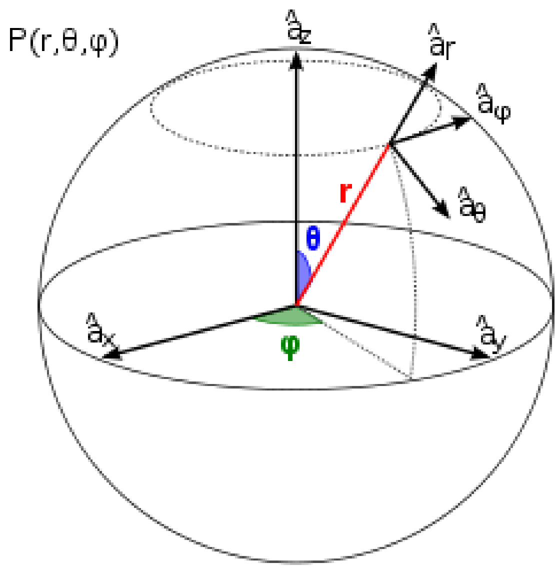
- [**Superficie**]: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$, la llamaremos *superficie* si existe $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (parametrización) continua tal que $S = \phi(D)$ con D tal que $Int(D) \subseteq \mathbb{R}^2$ es un dominio (abierto y conexo).
- Diremos que $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es parametrización:
  - Suave, si es clase $\mathcal{C}^1$.
  - Simple, si es inyectiva.
- [**Vectores Tangentes**]: Se definen los vectores tangentes a S en el punto $\varphi(u_0, v_0)$, mediante:
$$\hat{t}_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u} / \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\| \qquad \hat{t}_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|$$
Y se dirá que φ es regular si $\hat{t}_u, \hat{t}_v$ son linealmente independientes.
- [**Vector normal**]: Definimos el vector normal a S en el punto $\varphi(u_0, v_0)$ a:
$$\hat{n} = \frac{\hat{t}_u \times \hat{t}_v}{\left\| \hat{t}_u \times \hat{t}_v \right\|}$$
Y con ello el plano tangente al plano generado por $\hat{t}_u, \hat{t}_v$ (normal a $\hat{n}$.
- [**Campo de normales**]: Dado S regular y $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrización regular de S podemos calcular un campo de normales $\hat{n}$ sobre S mediante:
$$\hat{n}(u,v) = \frac{\hat{t}_u(u,v) \times \hat{t}_v(u,v)}{\left\| \hat{t}_u(u,v) \times \hat{t}_v(u,v) \right\|} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\|}$$
- [**Superficie regular orientable**]: Diremos que una superficie regular S está orientada según el campo de vectores normales $\hat{n} : s \to \mathbb{R}^3$ cuando este quede bien definido globalmente como una función continua sobre la superficie.
- [**Área**]: El Área de una superficie S viene dada por:
$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\| dudv$$
- [**Integral de Campo Escalar**]: Sea S una superficie orientable y $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ campo escalar continuo sobre $\Omega \subseteq S$. Se define la integral de f a través de la superficies S como:
$$\iint_S f \cdot dS = \iint_D f(\varphi(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\| dudv$$
Donde φ es parametrización regular de S que respeta orientación.

P1.- Considere la semisuperficie esférica unitaria superior, luego la siguiente parametrización

$$x(u,v) = sen(u)cos(v), y(u,v) = sen(u)sen(v), z(u,v) = cos(u)$$

a) Determine donde vive u, v y sepa que son vectores ortogonales, calcule $||r_u \times r_v||$ y bajo la parametrización en cartesianas, pero en dos variables con $(x,y) \in B$, círculo de unidad, calcule $||r_x \times r_y||$.

b) Hallar la integral $f(x,y,z) = z^2$ sobre la superficie semiesférica unitaria y verifique la integral de superficie con el resultado usual.



P2.- a) Encuentre una expresión para el vector normal de la superficie dada por:

$$x = \cos\alpha \sin\beta \quad y = \sin\alpha \sin\beta \quad z = \cos\beta$$

con $\alpha \in [0, 2\pi]$ y $\beta \in [0, \pi]$.

b) Encuentre una expresión para el vector normal de la superficie dada por:

$$x = \sin\gamma \quad y = \mu \quad z = \cos\gamma$$

con $\gamma \in [0, 2\pi]$ y $\mu \in [-1, 3]$.

c) ¿Qué puede decir de la regularidad de las superficies?

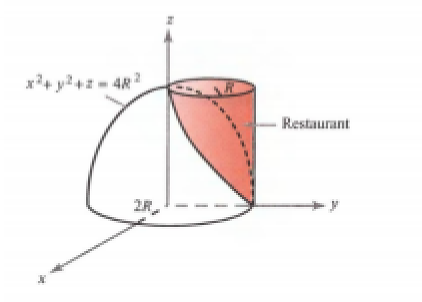
P3.- a) Encuentre el área de la superficie definida por $S = \{x^2 + y^2 \leq 2; z = xy\}$

b) Calcule el área del parche de superficie $S = \{0 < x_1 < x_2, 0 < x_2 < 1, x_3 = \cosh x_1\}$

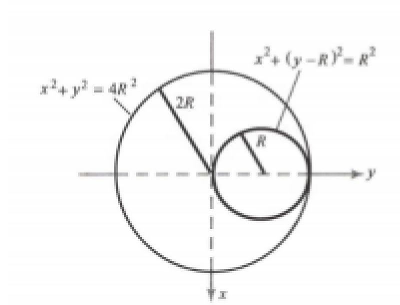
c) Sea $\phi(u,v) = (u - v, u + v, uv)$ y sea D el disco unitario en el plano (u,v). Encuentre el área de $\phi(D)$.

d) El cilindro $x^2 + y^2 = x$ en $\mathbb{R}^3$ divide la esfera unitaria en dos secciones. S_1 lo que está dentro del cilindro y S_2 lo que está fuera de él. Encuentre el valor de $\frac{A(S_2)}{A(S_1)}$.

P4.- Están construyendo un restaurante en la ladera de la montaña. Los planos del arquitecto se muestran a continuación:



Vista lateral



Vista superior

a) Parametrice la superficie del restaurante. Considere R como conocido.

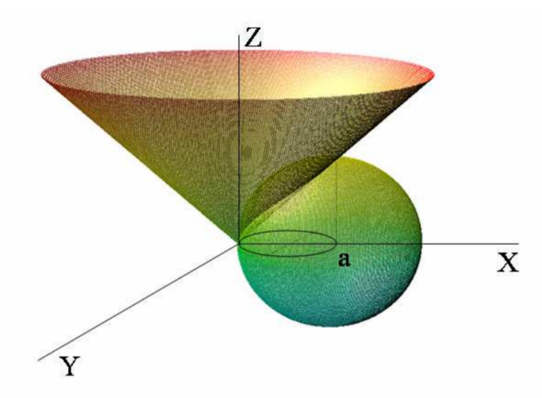
b) La pared vertical curvada del restaurante será hecha de vidrio. ¿Cuánto vidrio se necesitará? Es decir, ,¿Cuál será el área de esta pared?

P5.- Calcule el área de la porción de superficie cónica

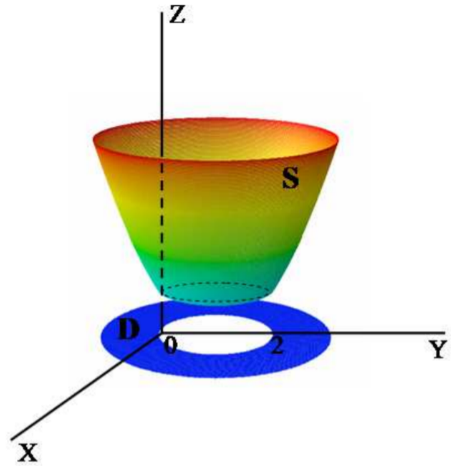
$$x^2 + y^2 = z^2$$

situada por encima del plano $z = 0$ y limitada por la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$$



P6.- Halle el área de la porción de la superficie $z = x^2 + (y-1)^2$ comprendida entre los planos $z = 1$ y $z = 4$



Ejercicios Propuestos

P7.- Problema Fundamental de la marraqueta [1=2=4]
Había una vez el mundo de los marraquetoides, donde la reina Marraqueta, se enfrentó a todo aquel subdito quien le negaba la cantidad que era un pan frances, batido o marraqueta.
para salir del conflicto bélico que ya hapia debastado a varias familias y generaciones decidió contratar a los mejores matemáticos y matemáticas del mundo (ustedes son secos y secas po, no lo olviden, les irá bacan < 3), para que le respondieran las siguientes preguntas y dieran por cerrado el caso que acabó con Media Narnia, Pueblo Paleta, Springfield, Rancagua y Macondo.

a) ¿Cuánto es una marraqueta?

b) Utilizando dos cilindros, un paralelepipedo y un paraboloide, a través de uniones e intersecciones genere el conjunto de los puntos que su volumen tienen la forma geométrica de una marraqueta.

c) Utilizando métodos de integracióm estime (puede dar sus medidas, pero debe ser consistente) la superficie crujiente de una marraqueta.
Hint: Usar integral de superficie , y parametrizar convenientemente.

P8.- Se definen las **coordenadas esferoidales prolato** (ξ, η, ϕ) mediante

$$x = a \,\mathrm{senh}(\xi)\,\mathrm{sen}(\eta)\cos(\phi),\; y = a\,\mathrm{senh}(\xi)\,\mathrm{sen}(\eta)\,\mathrm{sen}(\phi),\; z = a\cosh(\xi)\cos(\eta)$$

donde $\xi > 0$, $\eta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Verifique que este sistema de coordenadas es ortogonal, y calcule la divergencia, el laplaciano, y el rotor en estas coordenadas.

P9.- Se definen las **coordenadas toroidales** (r, φ, θ) mediante

$$x = (R + r\,\mathrm{sen}(\varphi))\cos\theta,\; y = (R + r\,\mathrm{sen}(\varphi))\,\mathrm{sen}\,\theta,\; z = r\cos(\varphi)$$

donde $r \in [0, R]$, $\varphi, \theta \in [0, 2\pi)$.

a) Verifique que este sistema de coordenadas es ortogonal, y calcule la divergencia, el laplaciano, y el rotor en estas coordenadas.

b) Piense y proponga una forma de paramtrizar un toroide de la siguiente caracteristica $\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$