MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Argenis Mendez.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.

Auxiliar 3: Coordenadas Ortogonales e Integral de Flujo

Resumen Resumen

- **Recuerdo Definición de Integral de flujo.** Sea S una superficie regular orientable, $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo de normales continuo sobre S, y $\overrightarrow{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo definido sobre un abierto Ω que contiene a S. Se define la integral de flujo del campo $\overrightarrow{F}$ a través de la superficie S orientada según $\hat{n}$ mediante

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \hat{n}\, dA = \iint_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{\varphi}(u,v)) \cdot \underbrace{\frac{\frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v} \right\|}}_{\hat{n}} \underbrace{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v} \right\| du\, dv}_{dA} =$$

$$= \iint_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{\varphi}(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v}(u,v) \right] du\, dv$$

donde $\overrightarrow{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de S compatible con la orientación, esto es tal que

$$\hat{n} = \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v} \Big/ \left\| \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial v} \right\|$$

- **Teorema de la Divergencia de Gauss.**
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un **abierto acotado** cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la **normal exterior**. Sea $\overrightarrow{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase C^1** sobre un abierto $U \supseteq \overrightarrow{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{A} = \iiint_{\Omega} (\overrightarrow{F})\, dV$$

  - **Nota 1:** Notar que $\partial\Omega$ es una superficie **cerrada**.
  - **Nota 2:** En coordenadas ortogonales el diferencial de volumen es $dV = h_u h_v h_w\, du\, dv\, dw$.

- [**Gradiente de un campo escalar**]: Sea f un campo escalar, al menos $\mathcal{C}^1$, se define el gradiente de f como

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

- [**Gradiente de un campo vectorial**]: Sea $\overrightarrow{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Se define el gradiente de $\overrightarrow{F}$ como

$$\nabla \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- **[Campo Conservativo]**: Decimos que un campo vectorial $\overrightarrow{F}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow R^3$ si:
  - Existe un campo escalar $\phi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \nabla\phi(x,y,z)$
  - $rot(\overrightarrow{F}) = 0$

- **[Divergencia]**: Sea $\overrightarrow{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Se define la divergencia de $\overrightarrow{F}$ como
$$div\overrightarrow{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

- Si definimos $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$, podemos definir la divergencia como
$$div\overrightarrow{F} = \nabla \cdot \overrightarrow{F}$$

- **[Rotor]**: Sea $\overrightarrow{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Se define el rotor de $\overrightarrow{F}$ como
$$rot\overrightarrow{F} = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z})\hat{i} + (\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x})\hat{j} + (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})\hat{k}$$

- Si definimos $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$, podemos definir el rotor como
$$rot\overrightarrow{F} = \nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

- **[Laplaciano]**: Sea f un campo escalar, al menos $\mathcal{C}^2$, se define el laplaciano de f como
$$\triangle f = \nabla^2 f = div(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$
Análogamente, sea $\overrightarrow{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$. Se define su laplaciano de como
$$\triangle\overrightarrow{F} = \triangle F_1\hat{i} + \triangle F_2\hat{j} + \triangle F_3\hat{k}$$

- **[Sistema Ortogonal]**: Se dice que el sistema de coordenadas $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v,w)$, con $(u,v,w) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$, es **ortogonal** si los vectores unitarios del triedro $\{\hat{u}, \hat{v}.\hat{w}\}$ definidos por
$$\hat{u} = \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial u}/||\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial u}||, \quad \hat{v} = \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial v}/||\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial v}||, \quad \hat{w} = \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}/||\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}||$$
son mutuamente ortogonales para cada $(u,v,w) \in D$.

- **[Factores de Escala]**: Corresponden a los siguientes valores reales:
$$h_u = ||\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial u}||, \quad h_v = ||\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial v}||, \quad h_w = ||\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w}||$$

- Gracias a lo anterior, podemos definir entonces:
$$\frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial u} = h_u\hat{u}, \quad \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial v} = h_v\hat{v}, \quad \frac{\partial\overrightarrow{r}}{\partial w} = h_w\hat{w}$$

- **[Coordenadas Cilíndricas]**: Corresponde a la transformación $\vec{r}(\rho,\theta,k) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, k)$, con los factores de escala dados por $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ y $h_k = 1$.
- **[Coordenadas Esféricas]**: Corresponde a la transformación $\vec{r}(r,\theta,\phi) = (r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi)$, con los factores de escala dados por $h_r = 1$, $h_\theta = r\sin\phi$ y $h_\phi = r$.
- **[Gradiente en coordenadas ortogonales]**

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}$$

- **[Divergencia en coordenadas ortogonales]**

$$div(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial(F_u h_v h_w)}{\partial u} + \frac{\partial(F_v h_u h_w)}{\partial v} + \frac{\partial(F_w h_u h_v)}{\partial w}\right)$$

- **[Rotor en coordenadas ortogonales]**

$$rot(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$

- **[Curva]**: Un conjunto Γ se llama curva si existe una función continua $\vec{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, llamada parametrización de la curva, tal que $\Gamma = \vec{r}([a,b])$. Además, la curva Γ puede ser:
  - Suave, si $\vec{r} \in \mathcal{C}^1$.
  - Regular, si $||\dot{\vec{r}}|| > 0$.
  - Simple, si $\vec{r}$ es inyectiva.
  - Cerrada, si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.
- **[Longitud de Curva]**: Se define la longitud de curva en el tiempo t como:

$$s(t) = \int_a^t ||\frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau}||d\tau$$

- **[Parametrización natural]** Para obtener la parametrización natural (o de longitud de curva). Es necesario obtener la función de longitud de arco ($s(t)$) y luego desde esta relación despejar t en función s, para finalmente encontrar:

$$\vec{\sigma}(s) = \vec{r}(t(s))$$

Pregunta 1 Se nos presenta la parametrización $\vec{r}(t) = (a\cos(t), a\,\text{sen}(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$ y $a > 0$.

P1 (a) Se pide mostrar si es que la parametrización es suave, cerrada, simple o regular.

P1 (b) Se pide encontrar una parametrización en longitud de arco para la curva.

Pregunta 2 Se nos presenta la parametrización $\vec{r}(t) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\,\text{sen}(t), ct)$, con $t \in [0,\infty)$ y $c > 0$.

P2 (a) Se pide mostrar si es que la parametrización es suave, simple o regular y además calcular su función de longitud de arco.

Pregunta 3. Se definen las **coordenadas toroidales** (r, φ, θ) mediante

$$x = (R + r\,\mathrm{sen}(\varphi))\cos\theta,\ y = (R + r\,\mathrm{sen}(\varphi))\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z = r\cos(\varphi)$$

donde $r \in [0, R]$, $\varphi, \theta \in [0, 2\pi)$.

P3 (a) Verifique que este sistema de coordenadas es ortogonal, y calcule la divergencia, el laplaciano, y el rotor en estas coordenadas.

P3 (b) Piense y proponga una forma de paramtrizar un toroide de la siguiente caracteristica $\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Pregunta 4 Considere la semisuperficie esférica unitaria superior, luego la siguiente parametrización

$$x(u, v) = sen(u)cos(v), y(u, v) = sen(u)sen(v), z(u, v)$$

P4 (a) Determine donde vive u, v y sepa que son vectores ortogonales, calcule $||r_u \times r_v||$ y bajo la parametrización en cartesianas, pero en dos variables con $(x, y) \in B$, círculo de unidad, calcule $||r_x \times r_y||$.

P4 (b) Hallar la integral $f(x, y, z) = z^2$ sobre la superficie semiesférica unitaria y verifique la integral de superficie con el resultado usual.

Pregunta 5 Para el campo vectorial

$\mathbf{A} = (x - y)\mathbf{u}_x + (x + y)\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z$,

calcule su flujo a través de las siguientes superficies cerradas:

Un cubo de arista a, con un vértice en el origen y aristas $a\mathbf{u}_x, a\mathbf{u}_y, a\mathbf{u}_z$.

En cada caso, halle el flujo por integración directa y por aplicación del teorema de Gauss.

Pregunta 6 . Verifique el Teorema de la Divergencia, calculando por separado las integrales

$$\int_{\partial\Omega} \overrightarrow{F} \cdot \hat{n}\, dA; \int_{\Omega} div(\overrightarrow{F})\, dV$$

con $\overrightarrow{F} = (x, y, z)$, $\Omega = D \cap G$ donde $D = \{x^2 + y^2 \geq 1/2\}$, $G = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ y donde $\hat{n}$ es la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$.