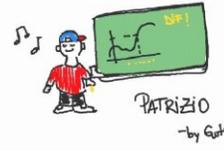


MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Argenis Mendez.

Auxiliar: Patricio Yáñez A.



## Auxiliar 2: Cálculo Vectorial, factores de Escala y Operadores fundamentales

### Resumen

- **[Gradiente de un campo escalar]:** Sea  $f$  un campo escalar, al menos  $C^1$ , se define el gradiente de  $f$  como

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

- **[Gradiente de un campo vectorial]:** Sea  $\vec{F} = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}$  un campo vectorial de clase  $C^1$ . Se define el gradiente de  $\vec{F}$  como

$$\nabla \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

- **[Campo Conservativo]:** Decimos que un campo vectorial  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  si:

- Existe un campo escalar  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\vec{F}(x, y, z) = \nabla \phi(x, y, z)$
- $rot(\vec{F}) = 0$

- **[Divergencia]:** Sea  $\vec{F} = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}$  un campo vectorial de clase  $C^1$ . Se define la divergencia de  $\vec{F}$  como

$$div \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

- Si definimos  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$ , podemos definir la divergencia como

$$div \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$$

- **[Rotor]:** Sea  $\vec{F} = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}$  un campo vectorial de clase  $C^1$ . Se define el rotor de  $\vec{F}$  como

$$rot \vec{F} = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{k}$$

- Si definimos  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$ , podemos definir el rotor como

$$rot \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

- **[Laplaciano]:** Sea  $f$  un campo escalar, al menos  $C^2$ , se define el laplaciano de  $f$  como

$$\Delta f = \nabla^2 f = \operatorname{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Análogamente, sea  $\vec{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$  un campo vectorial de clase  $C^2$ . Se define su laplaciano de como

$$\Delta \vec{F} = \Delta F_1\hat{i} + \Delta F_2\hat{j} + \Delta F_3\hat{k}$$

- **[Sistema Ortogonal]:** Se dice que el sistema de coordenadas  $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$ , con  $(u, v, w) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$ , es **ortogonal** si los vectores unitarios del triedro  $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$  definidos por

$$\hat{u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} / \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\|, \quad \hat{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} / \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|, \quad \hat{w} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} / \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\|$$

son mutuamente ortogonales para cada  $(u, v, w) \in D$ .

- **[Factores de Escala]:** Corresponden a los siguientes valores reales:

$$h_u = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\|, \quad h_v = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|, \quad h_w = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\|$$

- Gracias a lo anterior, podemos definir entonces:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = h_u \hat{u}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = h_v \hat{v}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = h_w \hat{w}$$

- **[Coordenadas Cilíndricas]:** Corresponde a la transformación  $\vec{r}(\rho, \theta, k) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, k)$ , con los factores de escala dados por  $h_\rho = 1$ ,  $h_\theta = \rho$  y  $h_k = 1$ .

- **[Coordenadas Esféricas]:** Corresponde a la transformación  $\vec{r}(r, \theta, \phi) = (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi)$ , con los factores de escala dados por  $h_r = 1$ ,  $h_\theta = r \sin \phi$  y  $h_\phi = r$ .

- **[Gradiente en coordenadas ortogonales]**

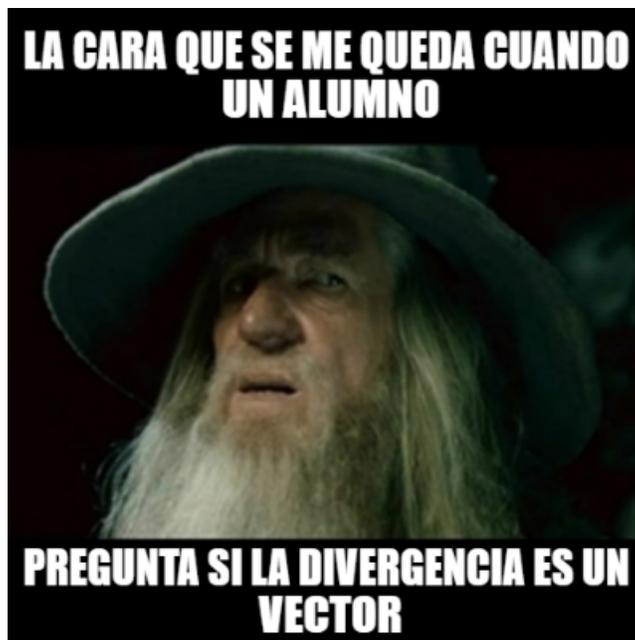
$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{u} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \hat{v} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \hat{w}$$

- **[Divergencia en coordenadas ortogonales]**

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left( \frac{\partial(F_u h_v h_w)}{\partial u} + \frac{\partial(F_v h_u h_w)}{\partial v} + \frac{\partial(F_w h_u h_v)}{\partial w} \right)$$

- **[Rotor en coordenadas ortogonales]**

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{u} & h_v \hat{v} & h_w \hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$$



**P1.** Sean  $\vec{F}, \vec{G} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial, sean  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  campos escalares, todos suficientemente diferenciables de modo que las expresiones siguientes estén bien definidas. Pruebe las siguientes identidades:

- a)  $\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + \nabla f \cdot g$
- b)  $div(f\vec{F}) = \nabla f \cdot \vec{F} + f \cdot div(\vec{F})$
- c)  $rot(f\vec{F}) = \nabla f \times \vec{F} + f \cdot rot(\vec{F})$
- d)  $div(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$

**P2.** Dado el campo vectorial  $\vec{F} = -z\hat{i} + y\hat{j} + x\hat{k}$ .

- a) ¿Existe un campo escalar  $u$  tal que  $\nabla u = \vec{F}$ ?
- b) ¿Existe un campo vectorial  $\vec{G}$  tal que  $rot\vec{G} = \vec{F}$ ?

**P3. Calcular**

1. Calcule el gradiente de

$$f(x, y, z) = \frac{\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

2. Calcule la divergencia del siguiente campo:

$$\left( \begin{matrix} F \\ = \end{matrix} \right) \frac{1}{x^2 + y^2} [(x - y\sqrt{x^2 + y^2} \arctan(z^2))\hat{i} + (y + x\sqrt{x^2 + y^2} \arctan(z^2))\hat{j} + z(x^2 + y^2)\hat{k}].$$

**P4.** Diremos que un campo vectorial  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 - \{\text{eje Z}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tiene simetría cilíndrica si puede escribirse en coordenadas cilíndricas como:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_\rho(\rho)\hat{\rho}, \quad \rho > 0$$

para alguna función  $F_\rho : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^1$ .

- a) Muestre que todo campo con simetría cilíndrica es irrotacional.
- b) Verifique que si un campo tiene simetría cilíndrica, entonces:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(F_\rho \rho)}{\partial \rho}$$

- c) Deduzca que un campo  $\vec{F}$  con simetría solenoidal (de divergencia nula) en  $\mathbb{R}^3 - \{\text{eje Z}\}$  si y sólo si:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{K}{\rho} \hat{\rho}$$

con  $K$  una constante real.

**P5.** Verifique si los siguientes campos son conservativos.

- a)  $\vec{F}(\vec{r}) = (y^2 \cos x + z^3)\hat{i} + (2y \sin x - 4)\hat{j} + (3xz^2 + 2z)\hat{k}$
- b)  $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{y}{z^2+4}, \frac{x}{z^2+4}, \frac{-2xyz}{z^4+8z^2+16}\right)$

- P6.** a) Sea  $\vec{F}$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^2$  pruebe que  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{F})) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$ .
- b) Los **campos** vectoriales  $\vec{E}$  (campo eléctrico) y  $\vec{H}$  (campo magnético) son solenoidales y están relacionados **por** las ecuaciones:

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \operatorname{rot}(\vec{H}) = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

**P7.** (En vola se pate a ala otra seman) Se definen las **coordenadas toroidales**  $(r, \varphi, \theta)$  mediante

$$x = (R + r \operatorname{sen}(\varphi)) \cos \theta, \quad y = (R + r \operatorname{sen}(\varphi)) \operatorname{sen} \theta, \quad z = r \cos(\varphi)$$

donde  $r \in [0, R]$ ,  $\varphi, \theta \in [0, 2\pi)$ . Verifique que este sistema de coordenadas es ortogonal, y calcule la divergencia, el laplaciano, y el rotor en estas coordenadas.

## Ejercicios Propuestos

**P1.** Demuestre las siguientes identidades:

a)  $div(rot(\vec{F})) = 0$

b)  $rot(\nabla f) = 0$

c)  $div(\nabla f \times \nabla g) = 0$

d)  $\Delta \vec{F} = \nabla(div \vec{F}) - rot(rot \vec{F})$

e)  $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\nabla f \cdot \nabla g$

f)  $rot(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F} div(\vec{G}) - \vec{G} div(\vec{F}) + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G}$

**P2.** Compruebe que el campo vectorial en coordenadas cilíndricas  $f(\rho, \theta, z) = 6\rho \sin(\frac{\theta}{2})\hat{\rho} + 24\rho \cos(\frac{\theta}{2})\hat{\theta}$ .

**P3.** Una esfera centrada en el origen de masa  $m$ , radio  $a$  y densidad uniforme tiene un potencial gravitatorio denotado por  $u$  y una fuerza gravitatoria denotada por  $F$ . Donde

- Si  $r < a$ ,  $u = \frac{3m}{2a} - \frac{mr^2}{2a^3}$  y  $F = \frac{mr}{a^3}\hat{r}$ .
- Si  $r \geq a$ ,  $u = \frac{m}{r}$  y  $F = \frac{m}{r^2}\hat{r}$ .

a) Compruebe que  $F = -\nabla u$  dentro y fuera de la esfera.

b) Pruebe que dentro de la esfera,  $u$  satisface que  $\nabla^2 u$  es constante.

c) Pruebe que fuera de la esfera,  $u$  satisface que  $\nabla^2 u = 0$ .

**P4.** Sea  $\phi$  un campo escalar de clase  $\mathcal{C}^2$  y  $\vec{G}$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$ , ambos definidos en  $\mathbb{R}^3$ . Se define el campo  $\vec{F}$  por  $\vec{F} = \nabla\phi + \mu\nabla \times \vec{G}$ , donde  $\mu$  es una constante real. Demuestre que  $div(\vec{F}) = \Delta\phi$ .