MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Argenis Mendez.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.

Auxiliar 1: Repaso de Curvas y Campos

Resumen

- [**Curva**]: Un conjunto Γ se llama curva si existe una función continua $\vec{r}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, llamada parametrización de la curva, tal que $\Gamma = \vec{r}([a,b])$. Además, la curva Γ puede ser:
  - Suave, si $\vec{r} \in \mathcal{C}^1$.
  - Regular, si $||\vec{r}'|| > 0$.
  - Simple, si $\vec{r}$ es inyectiva.
  - Cerrada, si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.
- [**Parametrizaciones equivalentes**] Sea $\vec{r}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ y $\vec{r}_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ dos parametrizaciones de una curva Γ. $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son equivalentes si existe una función biyectiva $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que
$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\varphi(t)), \forall t \in [a,b]$$
En este caso φ se llamará reparametrización.
- [**Longitud de Curva**]: Se define la longitud de curva en el tiempo t como:
$$s(t) = \int_a^t ||\frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau}||d\tau$$
- Sea Γ una curva regular y simple, con parametrización $\vec{r}(t)$ y parametrización natural $\sigma(s)$. Se tiene que:

	En función de s	En función de t
Velocidad $\vec{v}(t)$		$\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$
Rapidez $v(t)$	$\frac{ds}{dt}$	$\left\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right\|$
Vector Tangente $\hat{T}$	$\frac{d\sigma(s)}{ds}$	$\frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{\left\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right\|}$
Curvatura k	$\left\|\frac{d\hat{T}(s)}{ds}\right\|$	$\frac{\left\|\frac{d\hat{T}}{dt}\right\|}{\left\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right\|}$
Radio de Curvatura R	$\frac{1}{k(s)}$	$\frac{1}{k(t)}$
Vector Normal $\hat{N}$	$\frac{\frac{d\hat{T}(s)}{ds}}{\left\|\frac{d\hat{T}(s)}{ds}\right\|}$	$\frac{\frac{d\hat{T}(t)}{dt}}{\left\|\frac{d\hat{T}(t)}{dt}\right\|}$
Vector Binormal $\hat{B}$	$\hat{T}(s) \times \hat{N}(s)$	$\hat{T}(t) \times \hat{N}(t)$
Torción τ	$-\hat{N}(s) \cdot \frac{d\hat{B}(s)}{ds}$	$-\hat{N}(t) \cdot \left(\frac{\frac{d\hat{B}(t)}{dt}}{\left\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right\|}\right)$

- **[Parametrización natural]** Para obtener la parametrización natural (o de longitud de curva). Es necesario obtener la función de longitud de arco ($s(t)$) y luego desde esta relación despejar t en función s, para finalmente encontrar:

$$\overrightarrow{\sigma}(s) = \overrightarrow{r}(t(s))$$

- [Observaciones] Cualquier otra parametrización regular conduce a la misma parametrización natural solo que puede variar el sentido (dependiendo del sentido de la parametrización). También se cumple que: $\|\frac{d\sigma}{ds}\|=1$

- **[Coordenadas Cilíndricas]**: La relación entre las coordenadas cartesianas y cilíndricas viene dada principalmente por:

$$T(\rho, \theta, k) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, k)$$

- **[Coordenadas Esféricas]**: La relación entre las coordenadas cartesianas y esféricas viene dada principalmente por:

$$T(r, \theta, \phi) = (r \sin\phi \cos\theta, r \sin\phi \sin\theta, r \cos\phi)$$

Propuestos curvas en el espacio

A. Sea la parametrización $r(t) = \left(a\cos(t), a\sin(t), \dfrac{ht}{2\pi}\right)$, $t \in [0, 2\pi]$. Determine si esta parametrización[1] es suave, regular, simple, cerrada y/o cerrada simple.

[1] En estricto rigor la cualidad de ser suave, simple, regular,etc. Es de las curvas, sin embargo, usaremos estas propiedades para referirnos de igual forma a las parametrizaciones. Se ruega comprender la diferencia entre curva y parametrización.

Auxiliar 11

P1

$r(t) = \left(a\cos(t), a\sin(t), \frac{h t}{2\pi}\right) \quad t \in [0, 2\pi]$

¿Suave? ✓

Debemos ver si $\vec{r}$ es C^1 $\Leftrightarrow$ por componente sea C^1.

⚠ Recordar que C^1 es que se pueda derivar 1 vez y que esa derivada sea continua

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \left(-a\,\text{sen}(t), a\cos(t), \frac{h}{2\pi}\right)$$

Es derivable en cada coordenada por algebra y composición de funciones derivables y la derivada es continua por algebra y composición

¿Regular? ✓

debemos ver que es C^1 y que $\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right\| > 0$

que sea C^1 ya lo vimos, falta que

$\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right\| > 0$

⚠ Recuerdo $\|(a, b, c)\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$$\Rightarrow \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right\| = \sqrt{a^2\,\text{sen}^2(t) + a^2\cos^2(t) + \frac{h^2}{4\pi^2}}$$

$$= \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} > 0$$

¿Simple? ✓

C^1 + inyectiva.

ya vimos que era C^1, veamos que es inyectiva

Sea t_1 y t_2 en $[0, 2\pi]$ tal que

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$$

$$\Rightarrow \left(a\cos(t_1), a\operatorname{sen}(t_1), \frac{h}{2\pi}t_1\right) = \left(a\cos(t_2), a\operatorname{sen}(t_2), \frac{h}{2\pi}t_2\right)$$

$\Rightarrow$ 1) $a\cos(t_1) = a\cos(t_2)$

2) $a\operatorname{sen}(t_1) = a\operatorname{sen}(t_2)$

3) $\dfrac{h t_1}{2\pi} = \dfrac{h t_2}{2\pi}$

de 3) $\Rightarrow t_1 = t_2$ $\therefore$ es inyectiva

$\Rightarrow$ es simple

¿Cerrada? X

hay que ver que $\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi)$

$$\vec{r}(0) = \left(a\cos(0), a\operatorname{sen}(0), \frac{h\,0}{2\pi}\right)$$

$$= (a, 0, 0)$$

$$\vec{r}(2\pi) = (a, 0, h)$$

Luego si $h \neq 0$ se tiene que no es cerrado

B. Encuentre alguna parametrización para las siguientes curvas

a) La parabola dada por $y = x^2, x \in [0, a]$ en sentido antihorario.

b) El segmento que une el punto $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ y el punto $\overrightarrow{q} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

c) El triangulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(3, 3)$.

d) La elipse dada por $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

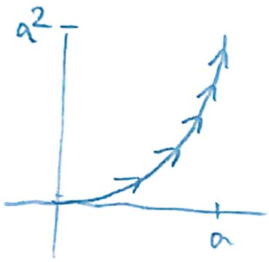
e) La curva que se obtiene de intersectar un casquete esférico unitario y la superficie de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$.

Aux 14

P1 a) $y = x^2$, $x \in [0, a]$ sentido antihorario

↳ Toda función de la forma $y = f(x)$, su parametrización será $\vec{r}(t) = (t, f(t))$, $t \in Dom(f)$

$\Rightarrow \vec{r}(t) = (t, t^2)$ $t \in [0, a]$ y si graficamos



a medida que avanza el x avanza el y en forma antihoraria.

Si queremos sentido horario, nos sirve $\vec{r}_2(t) = (a-t, (a-t)^2)$

b) Segmento de $\vec{p}$ a $\vec{q}$: Usaremos una parametrización que empieza en $\vec{p}$ y termina en $\vec{q}$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \underbrace{\vec{p} + t\underbrace{(\vec{q} - \vec{p})}_{\text{vector director}}}_{\text{Ec. de la recta}}$$

queremos que en cierto "t_0", $\vec{r}(t_0) = \vec{q}$.

Ese $t_0 = 1$ (Compruebe)

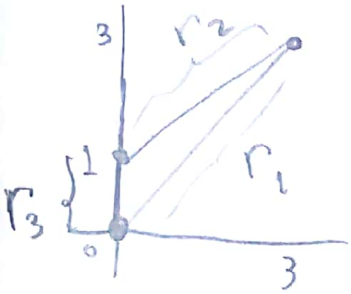
$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p}) \quad t \in [0, 1]$$

$$= \underbrace{(1-t)\vec{p} + t\vec{q}}$$

A esto se le conoce como Combinación Convexa

P1) c) Triangulo $(0,0),(0,1),(3,3)$

hacemos una parametrización por partes



$$\Rightarrow \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

$$\Gamma_1 := \vec{r}_1(t) = (1-t)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \qquad t \in [0,1].$$

$$= t\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

$$\Gamma_2 = \vec{r}_2(t) = (1-t)\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad t \in [0,1].$$

$$\Gamma_3 = \vec{r}_3(t) = (1-t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad t \in [0,1].$$

$$= (1-t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

la orientación queda

d) Elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Coordenadas elipticas $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix}3\cos(t)\\2\operatorname{Sen}(t)\end{pmatrix}$

e) Casquete unitario $\cap$ $z^2 = x^2 + y^2$

Casquete $:=$ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $\wedge$ $z^2 = x^2 + y^2$

$$\Rightarrow \quad z^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 2z^2 = 1$$

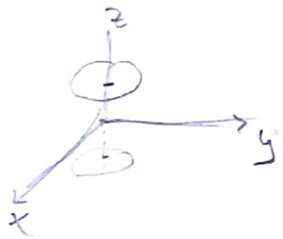
$$z = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

¿Que es $z^2 = x^2 + y^2$?

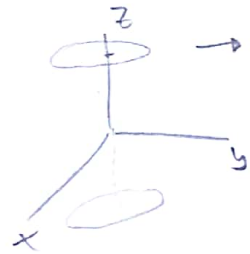
Demos valores de z^2.

Si $z^2 = 0$

Si $z^2 = 1$

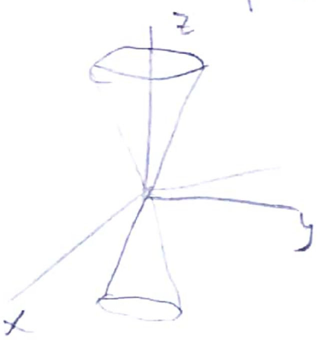


Si $z^2 = 2$



$\rightarrow$ radio es igual a z^2

Si siguen se daran cuenta que son 2 conos



Scanned by CamScanner

ahora con coordenadas cilíndricas

$x = \rho \cos(t)$, $y = \rho \operatorname{sen}(t)$, $z = z_0 \rightarrow$ cte

$$\Rightarrow \vec{r}_+(t) = (\rho \cos(t), \rho \operatorname{sen}(t), z_0)$$

$$= \left(\rho \cos(t), \rho \operatorname{sen}(t), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Notar que $x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow \rho^2 \cos^2(t) + \rho^2 \operatorname{sen}^2(t) = z^2$

$$\Rightarrow \rho^2 = z^2$$

$$\Rightarrow \rho = \pm z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \vec{r}_+(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t), \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(t), \frac{1}{\sqrt{2}}\right) := \Gamma_+$$

$$\wedge \quad \vec{r}_-(t) = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t), \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(t), \frac{1}{\sqrt{2}}\right) := \Gamma_-$$

$$\Rightarrow \Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$$

Scanned by CamScanner

C. [Recuerdo de Vietnam]

Considere la curva Γ parametrizada por $\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \phi(u)sen(u)du \\ \int_0^t \phi(u)cos(u)du \\ \int_0^t \phi(u)tan(u)du \end{pmatrix}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2})$, donde $\phi(t) > 0$ es una función continua en $[0, \frac{\pi}{2})$

a) Demuestre que Γ es regular. Calcule $T(t), N(t)$ y la curvatura $\kappa(t)$ en términos de $\phi(t)$. Use estos resultados para determinar $\phi(t)$ de modo que κ sea constante e igual 1.

b) Calcule $B(t)$. Además, sabiendo que (no lo demuestre) $\dfrac{dB}{dt} = s(1+c^2)^{\frac{-3}{2}} \begin{pmatrix} (c^2 - s^2)(2+c^2) \\ -2sc(2+c^2) \\ c(2+c^2) \end{pmatrix}$, donde $s = sen(t)$ y $c = cos(t)$, calcule la torsión τ de Γ en términos de $\phi(t)$ y determine $\phi(t)$ de modo que τ sea constante e igual a -1

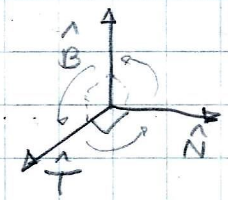
Si un vector en vez de escribirse $\vec{x}$ se escribe como $\hat{x}$

$$\Rightarrow \quad \hat{x} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \quad \Big\} \text{ vector normalizado}$$

$\downarrow$

vector de norma 1

Aplicación a Frenet



Regla de la mano derecha

$T \times N = B$
$N \times T = -B$

$B \times T = N$
$T \times B = -N$

$N \times B = T$
$B \times N = -T$

$\boxed{P1}$ a) pdq: Γ es regular $\Leftarrow$ $\vec{r}(t)$ es C^1 y $\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| > 0$

$$\Rightarrow r(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \phi(u)\,\mathrm{sen}(u)\,du \\ \int_0^t \phi(u)\cos(u)\,du \\ \int_0^t \phi(u)\tan(u)\,du \end{pmatrix}$$

Cada componente es derivable por TFC

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \phi(t)\,\text{sen}(t) \\ \phi(t)\cos(t) \\ \phi(t)\tan(t) \end{pmatrix} \Bigg\}$$

Cada componente es continua

Luego $\vec{r}$ es C^1

falta ver que $\left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| > 0$

$$\Rightarrow \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| = \sqrt{(\phi(t))^2 (\text{sen}^2(t) + \cos^2(t) + \tan^2 t)}$$

$$= |\phi(t)| \cdot \sqrt{1 + \tan^2(t)}$$

$$= |\phi(t)| \cdot |\sec(t)|$$

$$= \phi(t) \sec(t)$$

$$> 0$$

Por enunciado $\phi(t) > 0$

y $\sec(t) \neq 0$ siempre

y entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ $\sec(t) > 0$

$\therefore$ Γ es regular pues $\vec{r}$ es C^1 y $\left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| > 0$

$$\rightarrow \hat{T}(t) = \frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|} = \frac{\cancel{\phi(t)} \begin{pmatrix} \text{sen}(t) \\ \cos(t) \\ \tan(t) \end{pmatrix}}{\cancel{\phi(t)} \sec(t)} = \cos(t) \begin{pmatrix} \text{sen}(t) \\ \cos(t) \\ \tan(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{sen}(t)\cos(t) \\ \cos^2(t) \\ \text{sen}(t) \end{pmatrix}$$

MÁS FACIL DE DERIVAR $\longrightarrow$ $= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\text{sen}(2t) \\ \cos^2(t) \\ \text{sen}(t) \end{pmatrix}$

$$N(t) = \frac{\frac{dT}{dt}(t)}{\left\|\frac{dT}{dt}(t)\right\|} = \frac{\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}}{\sqrt{\cos^2(2t) + \operatorname{sen}^2(2t) + \cos^2(t)}}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}}{\sqrt{1+\cos^2(t)}} = \frac{\begin{pmatrix} \cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t) \\ -2\operatorname{sen}(t)\cos(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}}{\sqrt{1+\cos^2(t)}}$$

Usando la notación $\cos(t) = c$, $\operatorname{sen}(t) = s$

$$= \begin{pmatrix} c^2 - s^2 \\ -2sc \\ c \end{pmatrix} \cdot (1+c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow K(t) = \frac{\sqrt{1+\cos^2(t)}}{\varnothing(t)\sec(t)} = \frac{\cos(t)\sqrt{1+\cos^2(t)}}{\varnothing(t)} = \frac{\left\|\frac{dT}{dt}(t)\right\|}{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right\|}$$

$$\Rightarrow \text{Si } K(t) = 1 \Rightarrow \varnothing(t) = \cos(t)\sqrt{1+\cos^2(t)}$$

b) $\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t)\cos(t) \\ \cos^2(t) \\ \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} \cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t) \\ -2\operatorname{sen}(t)\cos(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2(t)}} \right]$$

Notación
$\operatorname{sen}(t) = s$
$\cos(t) = c$

$$= \begin{pmatrix} sc \\ c^2 \\ s \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} c^2 - s^2 \\ -2sc \\ c \end{pmatrix} (1+c^2)^{-1/2} \right]$$

factorizo

$$= (1+c^2)^{-1/2} \left[\begin{pmatrix} sc \\ c^2 \\ s \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c^2 - s^2 \\ -2sc \\ c \end{pmatrix} \right]$$

$$= (1+c^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} c^3 - (-2s^2c) \\ \cancel{sc^2} - s^3 - (\cancel{sc^2}) \\ -2s^2c^2 - (c^4 + s^2c^2) \end{pmatrix}$$

$$= (1+c^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} c^3 + 2s^2c \\ -s^3 \\ -c^4 - s^2c^2 \end{pmatrix}$$

Calculemos la torsión τ sabiendo que

$$\frac{dB}{dt} = s(1+c^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} (c^2-s^2)(2+c^2) \\ -2sc(2+c^2) \\ c(2+c^2) \end{pmatrix}$$

$$= s(1+c^2)^{-3/2}(2+c^2) \underbrace{\begin{pmatrix} c^2-s^2 \\ -2sc \\ c \end{pmatrix}}_{\substack{\text{¿Quien es? :O} \\ \text{es } \hat{N} \text{ sin la "constante"}}}$$

$$= s(1+c^2)^{-3/2}(2+c^2)\cdot \hat{N}(1+c^2)^{1/2}$$

$$= s(1+c^2)^{-1}(2+c^2)\cdot \hat{N}$$

$$\rightarrow \tau = -\hat{N}(t) \bullet \frac{\frac{dB}{dt}}{\left\|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right\|} = -\hat{N}(t) \bullet \frac{s(1+c^2)^{-1}(2+c^2)\hat{N}(t)}{\phi(t)\sec(t)}$$

Producto punto

factorizar

$$= -\frac{s(1+c^2)^{-1}(2+c^2)}{\phi(t)\sec(t)}\left[\hat{N}(t)\cdot\hat{N}(t)\right]$$

$$= -\frac{s(1+c^2)^{-1}(2+c^2)}{\phi(t)\sec(t)} \cancel{\|\hat{N}(t)\|^2}\, 1^2$$

$$= -\frac{s(1+c^2)^{-1}(2+c^2)\,c}{\phi(t)}$$

$$\therefore\ \tau = \frac{-\,5c\,(1+c^2)^{-1}(2+c^2)}{\phi(t)}$$

Notar que $\|\hat{N}\| = 1$ pues $\hat{N}$ es unitario

Si $\tau = -1$

$$\Rightarrow \quad \phi(t) = 5c(1+c^2)^{-1}(2+c^2)$$

$\boxed{P2}$ $\rho(x,y,z) = 2x + 9z \quad , \quad \vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$

$$\rightarrow M = \int_{\Gamma} \rho\, d\ell = \int_0^3 \rho(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| dt$$

$$= \int_0^3 2t + 9t^3 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \right\| dt$$

$$= \int_0^3 2t + 9t^3 \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}\, dt$$

$u = 1 + 4t^2 + 9t^4$

$du = 8t + 36t^3$

$\quad = 4(2t + 9t^3)$

$$= \int_{u(0)}^{u(3)} \frac{\sqrt{u}}{4}\, du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2}\right)\Bigg|_{u(0)}^{u(3)}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + 4t^2 + 9t^4\right)\Big|_0^3$$

$$= \frac{1}{6}\left((766)^{3/2} - 1\right)$$

$$= M$$

D. Sea $r(s)$ una parametrización en longitud de arco de una curva Γ. Demuestre que

$$\frac{dr}{ds} \cdot \left(\frac{d^2 r}{ds^2} \times \frac{d^3 r}{ds^3} \right) = \tau \kappa^2$$

$\boxed{P3}$ pdq: $\frac{dr}{ds} \cdot \left(\frac{d^2 r}{ds} \times \frac{d^3 r}{ds^3} \right) = \tau \kappa^2$

r es lo que en el apunte sale como σ

$\Rightarrow \frac{dr}{ds} = T \quad , \quad \frac{d^2 r}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{ds}\right)$, obs: $K \in \mathbb{R}$

P. punto

$\Rightarrow \frac{dr}{ds} \cdot \left(\frac{d^2 r}{ds} \times \frac{d^3 r}{ds^3} \right) = T \cdot \left(\frac{dT}{ds} \times \frac{d^2 T}{ds} \right)$

$= T \cdot \left(\underbrace{\frac{dT}{ds} \cdot \frac{\overset{K}{\|\frac{dT}{ds}\|}}{\|\frac{dT}{ds}\|}}_{N} \times \frac{d^2 T}{d s^2} \right)$

$= T \cdot \left(NK \times \frac{d}{ds}(NK) \right)$

5

$\Rightarrow \ldots = \hat{T} \cdot \left(\hat{N}K \times \frac{d}{ds}(\hat{N}K) \right)$

Regla del producto

$= \hat{T} \cdot \left(\hat{N}K \times \left(K \frac{d\hat{N}}{ds} + \hat{N} \frac{dK}{ds} \right) \right)$

Distribución

$= \hat{T} \cdot \left[\left(\hat{N}K \times K \frac{d\hat{N}}{ds} \right) + \left(\hat{N}K \times \hat{N} \frac{dK}{ds} \right) \right]$

Saca K como cte y formula de frenet

$= \hat{T} \cdot \left[K^2 \left(\hat{N} \times (-K\hat{T} + \tau \hat{B}) \right) + K \frac{dK}{ds} \cancel{(\hat{N} \times \hat{N})}^{\vec{0}} \right]$

$= \hat{T} \cdot \left\{ K^2 \left[-K(\hat{N} \times \hat{T}) + \tau (\hat{N} \times \hat{B}) \right] \right\}$

ver BACK GROUND

$= \hat{T} \cdot \left\{ K^2 \left[-K(-\hat{B}) + \tau \hat{T} \right] \right\}$

$= K^2 \left\{ \hat{T} \cdot \left[K\hat{B} + \tau \hat{T} \right] \right\}$

Distrib

$= K^2 \left\{ K(\hat{T} \cdot \hat{B}) + \tau (\hat{T} \cdot \hat{T}) \right\} \qquad T \perp B$

Ver BACK GROUND

$= K^2 \left\{ \cancel{K \cdot 0} + \tau \cancel{\|\hat{T}\|^2}^{1} \right\} \qquad T \parallel T$

$= K^2 \cdot \tau$

$\boxtimes$

E. Sea la curva que se forma al intersectar:

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{y} \quad xtanh(z) = y$$

con $0 \leq z \leq 1$ y $x, y \geq 0$. Se pide:

a) Parametrizar la curva y calcular su longitud.

b) Encontrar su parametrización en longitud de arco.

c) Calcule el vector Tangente, Normal y Binormal.

F. El objetivo de esta pregunta es encontrar el plano osculador de un curva para esto necesita las siguientes definiciones:

Una de las formas de obtener un plano Π es encontrar su ecuación normal $< \overrightarrow{v} - \overrightarrow{p}, \overrightarrow{n} >$ donde $\overrightarrow{v} \in \Pi$ arbitrario, $\overrightarrow{p} \in \Pi$ fijo o conocido y $\overrightarrow{n}$ es un vector normal.

Dada la curva definida por:

$$\overrightarrow{r}(t) = (cos(t), sen(t), t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

- **[Teorema de Fubini]**: Sean $R_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $R_2 \subseteq \mathbb{R}^m$, $R = R_1 \times R_2$, y $f : R \longrightarrow R$ una función integrable, tal que las funciones

$$x \in R_1 \to \int_{R_2} f(x,y)dy \quad , \quad y \in R_2 \to \int_{R_1} f(x,y)dx$$

están bien definidas y son integrables. Entonces se tiene la validez de las igualdades

$$\int_R f = \int_{R_1} (\int_{R_2} f(x,y)dy)dx = \int_{R_2} (\int_{R_1} f(x,y)dx)dy$$

- **[Teorema del Cambio de Variable]**: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $T : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Sea D' una región abierta y acotada con $Adh(D') \subseteq \Omega$ y supongamos además que T es inyectiva en D', que la matriz $T'(u)$ es invertible para todo $u \in D'$ y que $D = T(D')$ es un abierto. Sea $f : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene entonces la validez de la igualdad

$$\int_D f(x)dx = \int_{D'} f(T(u)) \cdot |det(T'(u))|du$$

- **[Campos]**: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto no vacío. Definimos:
  - **Campo Escalar** sobre Ω a toda función a valores reales, es decir, a toda función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
  - **Campo Vectorial** sobre Ω a toda función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Citado Cálculo diferencial e Integral Uchile y Cálculo en varias variables coordinado 2019.

P1. Las coordenadas de una partícula en el tiempo vienen dadas por:

$$\overrightarrow{r}(t) = (\sin t - t\cos t, \cos t + t\sin t, t^2)$$

Calcule $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{N}$, k y R.

P2. Demuestre que una curva sin curvatura, corresponde a una recta.

P3. a) Sea $\rho = f(\theta)$ la ecuación en coordenadas polares de una curva Γ. Demuestre que el largo de Γ en el intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ es

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta$$

b) Demuestre que para el caso en que se cumpla $f'(\theta) = af(\theta)$, con a un número real, la curvatura de Γ en cualquier θ está dada por

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{\sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}}$$

P4. Dibuje las líneas de corriente/flujo de los siguientes campos vectoriales.

a) $\overrightarrow{F}(x,y) = (x,y)$

b) $\overrightarrow{F}(x,y) = (1, y^2 - y)$

c) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (\frac{-y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{-z}{x^2+y^2+z^2})$

d) $\overrightarrow{F}(r,\theta,\phi) = \frac{K}{r^2}\hat{r}$, para los casos $K < 0$ y $K > 0$.

P5. En esta pregunta se pide calcular $\int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$ y se sugiere utilizar el teorema de Fubini dos veces.

P6. La siguiente integral, llamada **Integral de Gauss** posee una variedad de aplicaciones, principalmente en la teoría de probabilidades, esta corresponde a la integración a lo largo de la recta real de la función gaussiana e^{-x^2}, posee un valor relativamente sencillo de calcular a lo largo de $\mathbb{R}$.
El objetivo de esta pregunta es calcular el valor de:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

a) Calcule el determinante de la transformación de coordenadas cartesianas a polares, es decir, de $(x,y) = P(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

b) Utilizando *Fubini* logre la siguiente igualdad:

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA = (\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx)^2$$

c) Utilizando lo encontrado en (a) llegue a que $I = \pi$.

d) Concluya y entregue el valor de la integral de Gauss.

Pucho[2]: "Hoy comienzan las auxiliares de CAA muchacho"

[2]Pucho = Pato + Lucho

P1. Las coordenadas de una partícula en el tiempo vienen dadas por:

$$\vec r(t) = (\sin t - t\cos t, \cos t + t\sin t, t^2)$$

$\vec r(t) \in \mathbb{R}^3$

Calcule $\vec T$, $\vec N$, k y R.

$$\vec T = \frac{\frac{\partial \vec r(t)}{\partial t}}{\left\| \frac{\partial \vec r}{\partial t} \right\|}$$

1

	En función de s	En función de t
Velocidad $\vec v(t)$		$\frac{d\vec r(t)}{dt}$
Rapidez $v(t)$	$\frac{ds}{dt}$	$\left\lVert \frac{d\vec r(t)}{dt} \right\rVert$
Vector Tangente $\hat T$	$\frac{d\sigma(s)}{ds}$	$\frac{\frac{d\vec r(t)}{dt}}{\left\lVert \frac{d\vec r(t)}{dt} \right\rVert}$
Curvatura k	$\left\lVert \frac{d\hat T(s)}{ds} \right\rVert$	$\frac{\left\lVert \frac{d\hat T}{dt} \right\rVert}{\left\lVert \frac{d\vec r(t)}{dt} \right\rVert}$
Radio de Curvatura R	$\frac{1}{k(s)}$	$\frac{1}{k(t)}$
Vector Normal $\hat N$	$\frac{\frac{d\hat T(s)}{ds}}{\left\lVert \frac{d\hat T(s)}{ds} \right\rVert}$	$\frac{\frac{d\hat T(t)}{dt}}{\left\lVert \frac{d\hat T(t)}{dt} \right\rVert}$
Vector Binormal $\hat B$	$\hat T(s) \times \hat N(s)$	$\hat T(t) \times \hat N(t)$
Torción τ	$-\hat N(s) \cdot \frac{d\hat B(s)}{ds}$	$-\hat N(t) \cdot \left(\frac{\frac{d\hat B(t)}{dt}}{\left\lVert \frac{d\vec r(t)}{dt} \right\rVert} \right)$

1) $\frac{\partial \vec r(t)}{\partial t} = (\cancel{\cos(t)} - (1\cdot\cancel{\cos(t)} + t(-\sin(t))), -\cancel{\sin(t)} + \cancel{\sin(t)} + t\cos(t), 2t)$

$= (t\sin(t), t\cos(t), 2t)$

2) $\left\| \frac{\partial \vec r(t)}{\partial t} \right\| = \sqrt{t^2\sin^2(t) + t^2\cos^2(t) + 4t^2}$

$= \sqrt{5t^2} = t\sqrt{5}$

3) $\vec T = (\sin(t), \cos(t), 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$ //

$$\vec N = \frac{\frac{\partial \vec T(t)}{\partial t}}{\left\| \frac{\partial \vec T(t)}{\partial t} \right\|}$$

1) $\frac{\partial \vec T}{\partial t} = (\cos(t), -\sin(t), 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$

2) $\left\| \frac{\partial \vec T}{\partial t} \right\| = \sqrt{(\cos^2(t) + (-\sin(t))^2 + 0^2)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

3) $\vec N = (\cos(t), -\sin(t), 0)$ //

P1. Las coordenadas de una partícula en el tiempo vienen dadas por:

$$\vec{r}(t) = (\sin t - t\cos t, \cos t + t\sin t, t^2)$$

Calcule $\vec{T}$, $\vec{N}$, k y R.

$$K_0 = \frac{\left\| \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} \right\|}{\left\| \frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial t} \right\|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{t\sqrt{5}} = \frac{1}{5t} \;/\!/ \Rightarrow R = \frac{1}{K_0} = 5t \;/\!/$$

P2. Demuestre que una curva sin curvatura, corresponde a una recta.

$$\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

$$K_\Gamma = \frac{\left\| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right\|}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|} = 0 \Rightarrow \left\| \frac{d\vec{T}(t)}{dt} \right\| = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{T}(t)}{dt} = 0 \quad / \int dt$$

$$\Rightarrow \vec{T}(t) = C \quad , \quad C \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{\left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|} = C$$

$\rightarrow \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\|$ no necesariamente es constante.

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = C \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| \quad / \int dt$$

- **[Longitud de Curva]**: Se define la longitud de curva en el tiempo t como:

$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau} \right\| d\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = C \cdot s(t) + C_1 \quad , \quad C_1 \in \mathbb{R}^n}$$

P3. a) Sea $\rho = f(\theta)$ la ecuación en coordenadas polares de una curva Γ. Demuestre que el largo de Γ en el intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ es

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}\, d\theta$$

b) Demuestre que para el caso en que se cumpla $f'(\theta) = a f(\theta)$, con a un número real, la curvatura de Γ en cualquier θ está dada por

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{\sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}}$$

$\rho = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))$

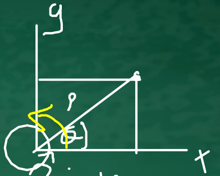
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

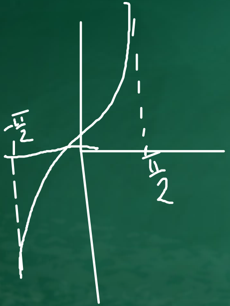
$x = r\cos(\theta)$

$y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$

$\theta = \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$

Apunte CAA no es correcto Pag 17





$$\Rightarrow \quad \theta = \begin{cases} \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \wedge y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \wedge y > 0 \\ \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \\ \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{si } x > 0 \wedge y < 0 \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

P3. a) Sea $\rho = f(\theta)$ la ecuación en coordenadas polares de una curva Γ. Demuestre que el largo de Γ en el intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ es

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta$$

b) Demuestre que para el caso en que se cumpla $f'(\theta) = af(\theta)$, con a un número real, la curvatura de Γ en cualquier θ está dada por

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{\sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}}$$

- **[Longitud de Curva]**: Se define la longitud de curva en el tiempo t como:

$$s(t) = \int_a^t ||\frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau}||d\tau$$

$s^2 + c^2 = 1$

128 Dif.

$\vec{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$

$\rho = f(\theta)$; $\vec{F}(\rho,\theta) = \vec{F}(f(\theta),\theta) = \vec{F}(\theta) = (f(\theta)\cos(\theta), f(\theta)\sin(\theta))$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{F}(\theta)}{\partial t} = (f'(\theta)\cos(\theta) + f(\theta)(-\sin(\theta)), f'(\theta)\sin(t) + f(\theta)\cos(\theta))$$

$$\Rightarrow \left|\left|\frac{\partial \vec{F}(\theta)}{\partial \theta}\right|\right| = \sqrt{f'^2(\theta)\cos^2(\theta) - 2\cancel{f(\theta)f'(\theta)}\sin\theta\cos(\theta) + f^2(\theta)\sin^2(\theta) + f'^2(\theta)\sin^2(\theta) + f^2(\theta)\cos^2(\theta) + 2f'(\theta)\cancel{f(\theta)\sin(\theta)}\cos(\theta)}$$

$$= \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}$$

$$\Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}\, d\theta \;//$$

P3. a) Sea $\rho = f(\theta)$ la ecuación en coordenadas polares de una curva Γ. Demuestre que el largo de Γ en el intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ es

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}\, d\theta$$

b) Demuestre que para el caso en que se cumpla $f'(\theta) = af(\theta)$, con a un número real, la curvatura de Γ en cualquier θ está dada por

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{\sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}}$$

$\star\ f'(\theta) = a f(\theta)$

$K_\theta = \dfrac{\left\| \dfrac{\partial \vec{T}(\theta)}{\partial \theta} \right\|}{\left\| \dfrac{\partial \vec{r}(\theta)}{\partial \theta} \right\|}$

$\vec{T} = \dfrac{\dfrac{\partial \vec{r}(\theta)}{\partial \theta}}{\left\| \dfrac{\partial \vec{r}(\theta)}{\partial \theta} \right\|}$

1) $\vec{r}(\theta) = (f(\theta)\cos(\theta), f(\theta)\sin(\theta))$ # $f(\theta) = \rho > 0 \Rightarrow f(\theta) > 0$

2) $\dfrac{\partial \vec{r}(\theta)}{\partial \theta} = (f'(\theta)\cos(\theta) + f(\theta)(-\sin(\theta)), f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta))$ | $\left\| \dfrac{\partial \vec{r}(\theta)}{\partial \theta} \right\| = \sqrt{f'^2(\theta) + f^2(\theta)}$

3) $\star\ \left\| \dfrac{\partial \vec{r}(\theta)}{\partial \theta} \right\| = \sqrt{f^2(\theta)a^2 + f^2(\theta)} = |f(\theta)|\sqrt{a^2+1} = f(\theta)\sqrt{a^2+1}$ //

4) $\vec{T} = (\cancel{f(\theta)}(a\cos(\theta) - \sin(\theta)), \cancel{f(\theta)}(a\sin(\theta) + \cos(\theta))) \dfrac{1}{\cancel{f(\theta)}\sqrt{a^2+1}}$

$\vec{T} = (a\cos(\theta) - \sin(\theta), a\sin(\theta) + \cos(\theta)) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

5) $\dfrac{\partial \vec{T}}{\partial t} = (-a\sin\theta) - \cos(\theta), a\cos(\theta) - \sin(\theta)) \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow \left\| \dfrac{\partial \vec{T}(\theta)}{\partial \theta} \right\| = \sqrt{a^2s^2 + c^2 + 2asc + ac^2 + s^2 - 2acs}$

$= \sqrt{a^2+1} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}} = 1$

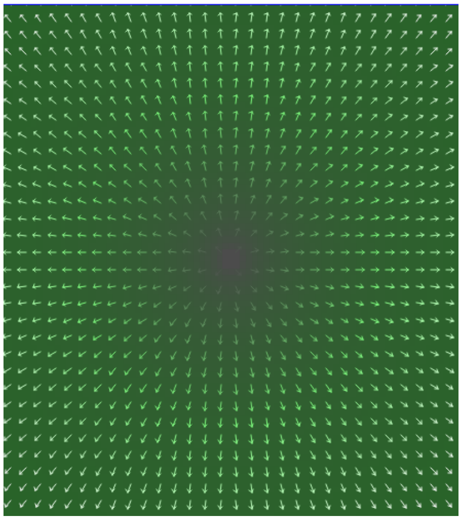
$\Rightarrow K_\theta = \dfrac{\cancel{\sqrt{a^2+1}}}{f(\theta)\cancel{\sqrt{a^2+1}}} = \dfrac{1}{f(\theta)} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{f(\theta)^2 a^2 + f^2(\theta)}}$ //

$K(\theta)$ //

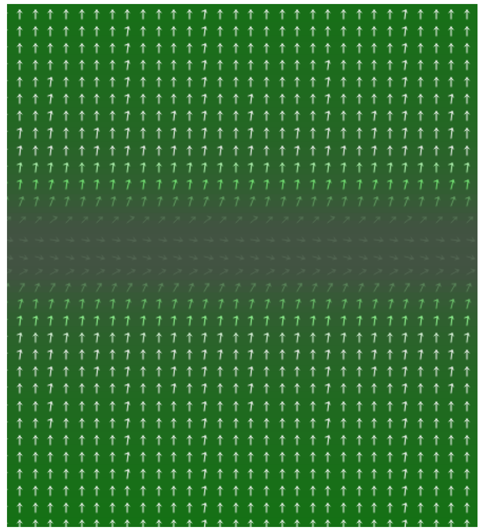
wfbj

Pregunta 4

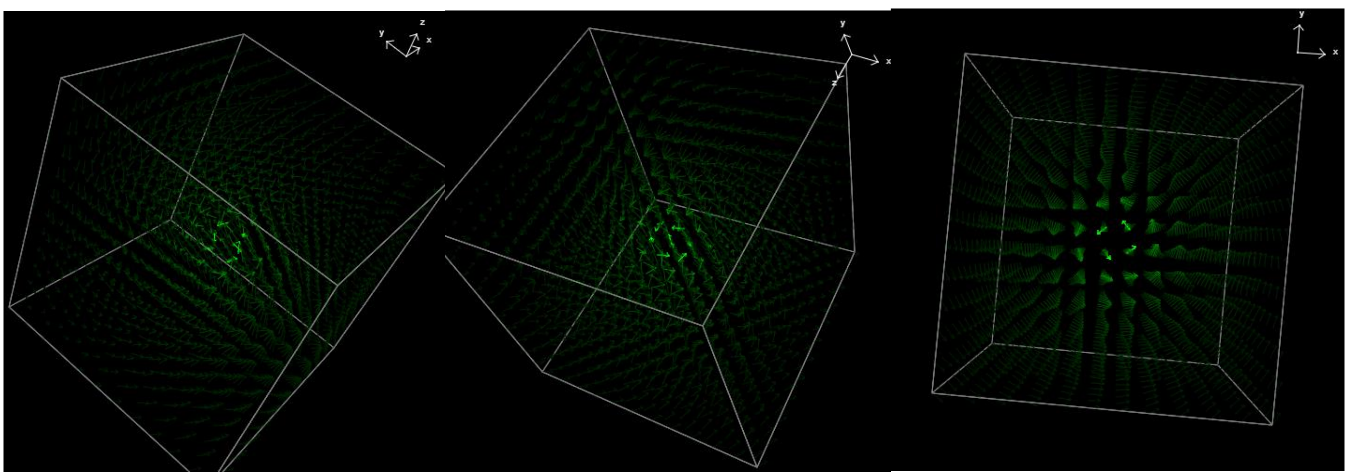
a)



b)

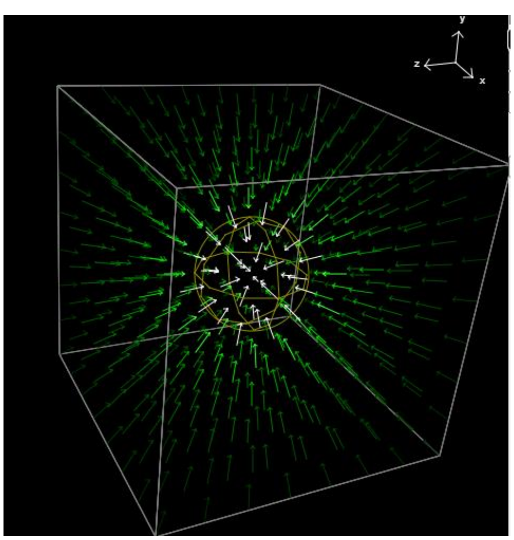


c)



La idea es que vean el “tornado” que se forma en el centro.

d)



Pregunta 5 En esta pregunta se pide calcular $\int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ y se sugiere utilizar el teorema de Fubini dos veces.

Efectivamente, esta corresponde a una integral iterada que se puede expresar como:

$$\int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \left(\int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z \doteq \int_0^1 I(z)\,\mathrm{d}z$$

Ahora notemos que la integral que representa $I(z)$ toma $z \in [0,1]$ fijo, por ende se puede desarrollar como:

$$I(z) = \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{(\star)}{=} \int_z^1 \int_z^x e^{x^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_z^1 (x-z)e^{x^3}\,\mathrm{d}x$$

Hecho esto y retornando a la integral original, se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \int_z^1 (x-z)e^{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^x (x-z)e^{x^3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{x^3}\left(\int_0^x (x-z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 e^{x^3}\left[-\frac{(x-z)^2}{2}\right]_{z=0}^{z=x}\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{x^3}\left[-\left(0-\frac{x^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{x^3}}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e-1}{3} = \frac{e-1}{6}
\end{aligned}$$

Respecto a la igualdad $(\star)$ e intercambio de variables x e y, lo importante es notar la región que estas variables están recorriendo al integrar, notar que si z es fijo, en la integral de la izquierda y recorre el intervalo $[z,1]$ completo, posteriormente para cada y en ese intervalo x recorre desde y hasta 1, es decir $[y,1]$, esto se puede ver gráficamente como la región de la izquierda de la fig. 1 (pág. siguiente).

En el caso de este uso del teorema, lo que se quiere es invertir el orden en que se recorren estas variables, por ende lo que hay que identificar ahora, es qué intervalo recorre x para un z fijo, en este caso, también es $[z,1]$, por otro lado para cada x, vemos que y recorre desde la altura z hasta la altura x, es decir $[z,x]$, esto se puede ver gráficamente como la región de la derecha (idéntica a la de la izquierda) de la fig. 1. Así, si denominamos la región como R, las siguientes igualdades para este caso son totalmente equivalentes.

$$\iint_R e^{x^3}\,\mathrm{d}A = \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_z^1 \int_z^x e^{x^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

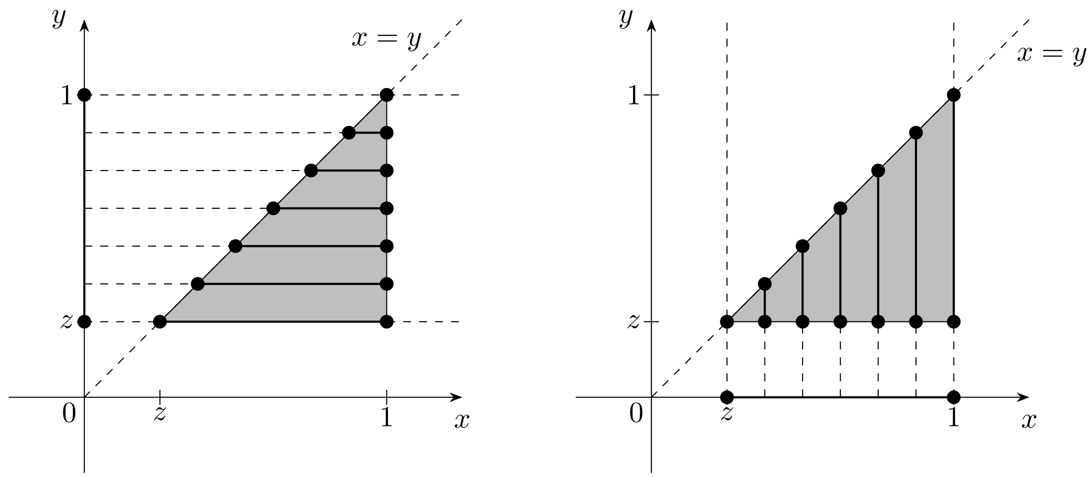


Figura 1: Región de integración R

Para la siguiente aplicación de Fubini, tiene que hacerse un análisis similar.

P6. La siguiente integral, llamada **Integral de Gauss** posee una variedad de aplicaciones, principalmente en la teoría de probabilidades, esta corresponde a la integración a lo largo de la recta real de la función gaussiana e^{-x^2}, posee un valor relativamente sencillo de calcular a lo largo de $\mathbb{R}$.
El objetivo de esta pregunta es calcular el valor de:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

a) Calcule el determinante de la transformación de coordenadas cartesianas a polares, es decir, de $(x,y) = P(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

b) Utilizando *Fubini* logre la siguiente igualdad:

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dA = (\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx)^2$$

c) Utilizando lo encontrado en (a) llegue a que $I = \pi$.

d) Concluya y entregue el valor de la integral de Gauss.

- **[Teorema de Fubini]**: Sean $R_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $R_2 \subseteq \mathbb{R}^m$, $R = R_1 \times R_2$, y $f : R \longrightarrow R$ una función integrable, tal que las funciones

$$x \in R_1 \to \int_{R_2} f(x,y)dy \quad , \quad y \in R_2 \to \int_{R_1} f(x,y)dx$$

están bien definidas y son integrables. Entonces se tiene la validez de las igualdades

$$\int_R f = \int_{R_1}(\int_{R_2} f(x,y)dy)dx = \int_{R_2}(\int_{R_1} f(x,y)dx)dy$$

- **[Teorema del Cambio de Variable]**: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $T : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Sea D' una región abierta y acotada con $Adh(D') \subseteq \Omega$ y supongamos además que T es inyectiva en D', que la matriz $T'(u)$ es invertible para todo $u \in D'$ y que $D = T(D')$ es un abierto. Sea $f : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene entonces la validez de la igualdad

$$\int_D f(x)dx = \int_{D'} f(T(u)) \cdot |det(T'(u))|du$$

- **[Campos]**: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto no vacío. Definimos:
  - **Campo Escalar** sobre Ω a toda función a valores reales, es decir, a toda función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
  - **Campo Vectorial** sobre Ω a toda función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Citado Cálculo diferencial e Integral Uchile y Cálculo en varias variables coordinado 2019.

a) $(x,y) = P(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

$P(\rho,\theta) = (P_x, P_y)$

$$|J_P(r,\theta)| = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial P_x}{\partial r} & \frac{\partial P_x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial P_y}{\partial r} & \frac{\partial P_y}{\partial \theta} \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}\right|$$

$$= r\cos^2(\theta) - r\sin^2(\theta) = r \,//$$

b) $$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dx\,dy \underset{\text{Fubini}}{=} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA \underset{C.V}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\cdot \underbrace{r}_{|J_P(r,\theta)|}\,dr\,d\theta$$

$$\left(e^{-r^2}\right)'$$

$$-2r\cdot e^{-r^2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = r$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right)'\,dr\,d\theta$$

$$\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right)' = -2r\cdot -\frac{e^{-r^2}}{2}$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right)\Bigg|_0^{\infty} d\theta \quad / \quad \int_0^{2\pi} 1\,d\theta = \theta\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$= re^{-r^2}$$

$$= \left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right)\Bigg|_0^{\infty}\cdot 2\pi$$

$$= \left(\lim_{r\to\infty}\cancel{\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right)}^{0} + \frac{e^{-0}}{2}\right)\cdot 2\pi = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$$

b) c)

$$I = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \pi \Rightarrow I = \sqrt{\pi}$$