

MA2002-2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Argenis Mendez.

Auxiliar: Patricio Yáñez A.



Auxiliar 1: Repaso de Curvas y Campos

Resumen

- **[Curva]:** Un conjunto Γ se llama curva si existe una función continua $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, llamada parametrización de la curva, tal que $\Gamma = \vec{r}([a, b])$. Además, la curva Γ puede ser:
 - Suave, si $\vec{r} \in \mathcal{C}^1$.
 - Regular, si $\|\vec{r}'\| > 0$.
 - Simple, si $\vec{r}$ es inyectiva.
 - Cerrada, si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.
- **[Parametrizaciones equivalentes]** Sea $\vec{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\vec{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos parametrizaciones de una curva Γ . $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son equivalentes si existe una función biyectiva $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\varphi(t)), \forall t \in [a, b]$$

En este caso φ se llamará reparametrización.

- **[Longitud de Curva]:** Se define la longitud de curva en el tiempo t como:

$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau} \right\| d\tau$$

- Sea Γ una curva regular y simple, con parametrización $\vec{r}(t)$ y parametrización natural $\sigma(s)$. Se tiene que:

	En función de s	En función de t
Velocidad $\vec{v}(t)$		$\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$
Rapidez $v(t)$	$\frac{ds}{dt}$	$\left\ \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\ $
Vector Tangente $\hat{T}$	$\frac{d\sigma(s)}{ds}$	$\frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{\left\ \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\ }$
Curvatura k	$\left\ \frac{d\hat{T}(s)}{ds} \right\ $	$\frac{\left\ \frac{d\hat{T}(t)}{dt} \right\ }{\left\ \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\ }$
Radio de Curvatura R	$\frac{1}{k(s)}$	$\frac{1}{k(t)}$
Vector Normal $\hat{N}$	$\frac{\frac{d\hat{T}(s)}{ds}}{\left\ \frac{d\hat{T}(s)}{ds} \right\ }$	$\frac{\frac{d\hat{T}(t)}{dt}}{\left\ \frac{d\hat{T}(t)}{dt} \right\ }$
Vector Binormal $\hat{B}$	$\hat{T}(s) \times \hat{N}(s)$	$\hat{T}(t) \times \hat{N}(t)$
Torción τ	$-\hat{N}(s) \cdot \frac{d\hat{B}(s)}{ds}$	$-\hat{N}(t) \cdot \left(\frac{\frac{d\hat{B}(t)}{dt}}{\left\ \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\ } \right)$

- **[Parametrización natural]** Para obtener la parametrización natural (o de longitud de curva). Es necesario obtener la función de longitud de arco ($s(t)$) y luego desde esta relación despejar t en función s , para finalmente encontrar:

$$\vec{\sigma}(s) = \vec{r}(t(s))$$

- **[Observaciones]** Cualquier otra parametrización regular conduce a la misma parametrización natural solo que puede variar el sentido (dependiendo del sentido de la parametrización). También se cumple que: $\|\frac{d\sigma}{ds}\|=1$
- **[Coordenadas Cilíndricas]:** La relación entre las coordenadas cartesianas y cilíndricas viene dada principalmente por:

$$T(\rho, \theta, k) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, k)$$

- **[Coordenadas Esféricas]:** La relación entre las coordenadas cartesianas y esféricas viene dada principalmente por:

$$T(r, \theta, \phi) = (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi)$$

Propuestas curvas en el espacio

A. Sea la parametrización $r(t) = \left(a \cos(t), a \sin(t), \frac{ht}{2\pi}\right)$, $t \in [0, 2\pi]$. Determine si esta parametrización¹ es suave, regular, simple, cerrada y/o cerrada simple.

B. Encuentre alguna parametrización para las siguientes curvas

- La parábola dada por $y = x^2$, $x \in [0, a]$ en sentido antihorario.
- El segmento que une el punto $\vec{p} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ y el punto $\vec{q} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
- El triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(3, 3)$.
- La elipse dada por $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.
- La curva que se obtiene de intersectar un casquete esférico unitario y la superficie de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$.

C. [Recuerdo de Vietnam]

Considere la curva Γ parametrizada por $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \phi(u) \sin(u) du \\ \int_0^t \phi(u) \cos(u) du \\ \int_0^t \phi(u) \tan(u) du \end{pmatrix}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2})$, donde $\phi(t) > 0$ es una función continua en $[0, \frac{\pi}{2})$

- Demuestre que Γ es regular. Calcule $T(t)$, $N(t)$ y la curvatura $\kappa(t)$ en términos de $\phi(t)$. Use estos resultados para determinar $\phi(t)$ de modo que κ sea constante e igual 1.

¹En estricto rigor la cualidad de ser suave, simple, regular, etc. Es de las curvas, sin embargo, usaremos estas propiedades para referirnos de igual forma a las parametrizaciones. Se ruega comprender la diferencia entre curva y parametrización.

- b) Calcule $B(t)$. Además, sabiendo que (no lo demuestre) $\frac{dB}{dt} = s(1 + c^2)^{\frac{-3}{2}} \begin{pmatrix} (c^2 - s^2)(2 + c^2) \\ -2sc(2 + c^2) \\ c(2 + c^2) \end{pmatrix}$, donde $s = \text{sen}(t)$ y $c = \text{cos}(t)$, calcule la torsión τ de Γ en términos de $\phi(t)$ y determine $\phi(t)$ de modo que τ sea constante e igual a -1

D. Sea $r(s)$ una parametrización en longitud de arco de una curva Γ . Demuestre que

$$\frac{dr}{ds} \cdot \left(\frac{d^2r}{ds^2} \times \frac{d^3r}{ds^3} \right) = \tau \kappa^2$$

E. Sea la curva que se forma al intersectar:

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{y} \quad x \tanh(z) = y$$

con $0 \leq z \leq 1$ y $x, y \geq 0$. Se pide:

- Parametrizar la curva y calcular su longitud.
- Encontrar su parametrización en longitud de arco.
- Calcule el vector Tangente, Normal y Binormal.

F. El objetivo de esta pregunta es encontrar el plano osculador de una curva para esto necesita las siguientes definiciones:

Una de las formas de obtener un plano Π es encontrar su ecuación normal $\langle \vec{v} - \vec{p}, \vec{n} \rangle$ donde $\vec{v} \in \Pi$ arbitrario, $\vec{p} \in \Pi$ fijo o conocido y $\vec{n}$ es un vector normal.

Dada la curva definida por:

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

- **[Teorema de Fubini]:** Sean $R_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $R_2 \subseteq \mathbb{R}^m$, $R = R_1 \times R_2$, y $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, tal que las funciones

$$x \in R_1 \rightarrow \int_{R_2} f(x, y) dy \quad , \quad y \in R_2 \rightarrow \int_{R_1} f(x, y) dx$$

están bien definidas y son integrables. Entonces se tiene la validez de las igualdades

$$\int_R f = \int_{R_1} \left(\int_{R_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{R_2} \left(\int_{R_1} f(x, y) dx \right) dy$$

- **[Teorema del Cambio de Variable]:** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Sea D' una región abierta y acotada con $\text{Adh}(D') \subseteq \Omega$ y supongamos además que T es inyectiva en D' , que la matriz $T'(u)$ es invertible para todo $u \in D'$ y que $D = T(D')$ es un abierto. Sea $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene entonces la validez de la igualdad

$$\int_D f(x) dx = \int_{D'} f(T(u)) \cdot |\det(T'(u))| du$$

- **[Campos]:** Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto no vacío. Definimos:
 - **Campo Escalar** sobre Ω a toda función a valores reales, es decir, a toda función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
 - **Campo Vectorial** sobre Ω a toda función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Citado Cálculo diferencial e Integral Uchile y Cálculo en varias variables coordinado 2019.

P1. Las coordenadas de una partícula en el tiempo vienen dadas por:

$$\vec{r}(t) = (\sin t - t \cos t, \cos t + t \sin t, t^2)$$

Calcule $\vec{T}$, $\vec{N}$, k y R .

P2. Demuestre que una curva sin curvatura, corresponde a una recta.

P3. a) Sea $\rho = f(\theta)$ la ecuación en coordenadas polares de una curva Γ . Demuestre que el largo de Γ en el intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ es

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta$$

b) Demuestre que para el caso en que se cumpla $f'(\theta) = af(\theta)$, con a un número real, la curvatura de Γ en cualquier θ está dada por

$$\kappa(\theta) = \frac{1}{\sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2}}$$

P4. Dibuje las líneas de corriente/flujo de los siguientes campos vectoriales.

- $\vec{F}(x, y) = (x, y)$
- $\vec{F}(x, y) = (1, y^2 - y)$
- $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{-z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$

d) $\vec{F}(r, \theta, \phi) = \frac{K}{r^2} \hat{r}$, para los casos $K < 0$ y $K > 0$.

P5. En esta pregunta se pide calcular $\int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 e^{x^3} dx dy dz$ y se sugiere utilizar el teorema de Fubini dos veces.

P6. La siguiente integral, llamada **Integral de Gauss** posee una variedad de aplicaciones, principalmente en la teoría de probabilidades, esta corresponde a la integración a lo largo de la recta real de la función gaussiana e^{-x^2} , posee un valor relativamente sencillo de calcular a lo largo de $\mathbb{R}$.

El objetivo de esta pregunta es calcular el valor de:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

a) Calcule el determinante de la transformación de coordenadas cartesianas a polares, es decir, de $(x, y) = P(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

b) Utilizando *Fubini* logre la siguiente igualdad:

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2$$

c) Utilizando lo encontrado en (a) llegue a que $I = \pi$.

d) Concluya y entregue el valor de la integral de Gauss.



Pucho²: “Hoy comienzan las auxiliares de CAA muchacho”

²Pucho = Pato + Lucho