Auxiliar 4

Más espacios vectoriales y Bases

Juan Pablo Sepúlveda

7 de octubre de 2020

GAMER TIME

Pregunta 2

Sea el siguiente espacio vectorial:

Pregunta 2

Sea el siguiente espacio vectorial:

$$W = \left\{ ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b = \frac{2c}{7}, b - a = \frac{c}{21} \right\}$$

Pregunta 2

Sea el siguiente espacio vectorial:

$$W = \left\{ ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b = \frac{2c}{7}, b - a = \frac{c}{21} \right\}$$

a) Muestre que $C = \{\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x, 1, 5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi\}$ genera W. ¿Es C una base?

b) Encuentre una base de W contenida en C

Pregunta 2

Recordemos que, primero, es importante chequear que W es un espacio vectorial (si no, no puede tener bases). Recordemos que, si $p_1, p_2 \in W, \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrarios, debemos probar que:

(1) $(\lambda + \beta)p_1$

Pregunta 2

Recordemos que, primero, es importante chequear que W es un espacio vectorial (si no, no puede tener bases). Recordemos que, si $p_1, p_2 \in W, \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrarios, debemos probar que:

(1) $(\lambda + \beta)p_1 = \lambda p_1 + \beta p_1$.

(2) $\lambda(p_1 + p_2) = \lambda p_1 + \lambda p_2$

(3) $\lambda(\beta p_1) = \lambda\beta p_1$

(4) $1 \cdot p_1 = p_1$

Pregunta 2

Recordemos que, primero, es importante chequear que W es un espacio vectorial (si no, no puede tener bases). Recordemos que, si $p_1, p_2 \in W, \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrarios, debemos probar que:

(1) $(\lambda + \beta)p_1 = \lambda p_1 + \beta p_1$.
(2) $\lambda(p_1 + p_2) = \lambda p_1 + \lambda p_2$
(3) $\lambda(\beta p_1) = \lambda\beta p_1$
(4) $1 \cdot p_1 = p_1$

O bien, podemos recordar que $\mathbb{P}_3$ es un espacio vectorial, y ocupar la caracterización compacta:

Pregunta 2

Recordemos que, primero, es importante chequear que W es un espacio vectorial (si no, no puede tener bases). Recordemos que, si $p_1, p_2 \in W, \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrarios, debemos probar que:

(1) $(\lambda + \beta)p_1 = \lambda p_1 + \beta p_1$.
(2) $\lambda(p_1 + p_2) = \lambda p_1 + \lambda p_2$
(3) $\lambda(\beta p_1) = \lambda \beta p_1$
(4) $1 \cdot p_1 = p_1$

si no recuerdan que $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ es un e.V.

O bien, podemos recordar que $\mathbb{P}_3$ es un espacio vectorial, y ocupar la caracterización compacta:

$$\lambda p_1 + \beta p_2 \in W$$

Pregunta 2

Recordemos que, primero, es importante chequear que W es un espacio vectorial (si no, no puede tener bases). Recordemos que, si $p_1, p_2 \in W, \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrarios, debemos probar que:

(1) $(\lambda + \beta)p_1 = \lambda p_1 + \beta p_1$.
(2) $\lambda(p_1 + p_2) = \lambda p_1 + \lambda p_2$
(3) $\lambda(\beta p_1) = \lambda \beta p_1$
(4) $1 \cdot p_1 = p_1$

O bien, podemos recordar que $\mathbb{P}_3$ es un espacio vectorial, y ocupar la caracterización compacta:

$$\lambda p_1 + \beta p_2 \in W$$

En cualquier caso, queda propuesto. xdxd

Pregunta 2

En cualquier caso, chequeado eso, ahora podemos comenzar.

Pregunta 2a

a) Muestre que $C = \{\underbrace{\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x}, 1, \underbrace{5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi}\}$ genera W.

Pregunta 2a

a) Muestre que $C = \{\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x, 1, 5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi\}$ genera W. ¿Es este conjunto una base?

Pregunta 2a

a) Muestre que $C = \{\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x, 1, 5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi\}$ genera W. ¿Es este conjunto una base?

Primero estudiemos un poco el conjunto W.

Pregunta 2a

a) Muestre que $C = \{\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x, 1, 5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi\}$ genera W. ¿Es este conjunto una base?

Primero estudiemos un poco el conjunto W. Pizarra time!

$a = \frac{5}{42} c$ $\qquad$ $b = \frac{c}{6}$

Pregunta 2a

a) Muestre que $C = \{\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x, 1, 5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi\}$ genera W. ¿Es este conjunto una base?

Primero estudiemos un poco el conjunto W. Pizarra time! Ahora, vamos a por la verdadera demostración:

Pregunta 2a

a) Muestre que $C = \{\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x, 1, 5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi\}$ genera W. ¿Es este conjunto una base?

Primero estudiemos un poco el conjunto W. Pizarra time! Ahora, vamos a por la verdadera demostración:

Sea $p \in W$,

Pregunta 2a

a) Muestre que $C = \{\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x, 1, 5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi\}$ genera W. ¿Es este conjunto una base?

Primero estudiemos un poco el conjunto W. Pizarra time! Ahora, vamos a por la verdadera demostración:

Sea $p \in W, p = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Pregunta 2a

a) Muestre que $C = \{\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x, 1, 5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi\}$ genera W. ¿Es este conjunto una base?

Primero estudiemos un poco el conjunto W. Pizarra time! Ahora, vamos a por la verdadera demostración:

Sea $p \in W, p = ax^3 + bx^2 + cx + d = \frac{5c}{42}x^3 + \frac{c}{6}x^2 + cx + d$ tomemos:

Pregunta 2a

a) Muestre que $C = \{\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x, 1, 5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi\}$ genera W. ¿Es este conjunto una base?

Primero estudiemos un poco el conjunto W. Pizarra time! Ahora, vamos a por la verdadera demostración:

Sea $p \in W, p = ax^3 + bx^2 + cx + d = \frac{5c}{42}x^3 + \frac{c}{6}x^2 + cx + d$ tomemos:

$$\lambda_1 = c + \frac{-42(d-2)}{\pi} \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = \frac{d-2}{\pi}$$

a) Muestre que $C = \{\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x, 1, 5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi\}$ genera W. ¿Es este conjunto una base?

Primero estudiemos un poco el conjunto W. Pizarra time! Ahora, vamos a por la verdadera demostración:

Sea $p \in W, p = ax^3 + bx^2 + cx + d = \frac{5c}{42}x^3 + \frac{c}{6}x^2 + cx + d$ tomemos:

$$\lambda_1 = c + \frac{-42(d-2)}{\pi} \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = \frac{d-2}{\pi}$$

Vamos a darnos cuenta de que:

Pregunta 2a

a) Muestre que $C = \{\overbrace{\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x}^{P_1}, \overbrace{1}^{P_2}, \overbrace{5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi}^{P_3}\}$ genera W. ¿Es este conjunto una base?

Primero estudiemos un poco el conjunto W. Pizarra time! Ahora, vamos a por la verdadera demostración:

Sea $p \in W, p = ax^3 + bx^2 + cx + d = \frac{5c}{42}x^3 + \frac{c}{6}x^2 + cx + d$ tomemos:

$$\lambda_1 = c + \frac{-42(d-2)}{\pi} \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = \frac{d-2}{\pi}$$

$\lambda_1 \cdot \frac{5}{42} + \lambda_3 \cdot 5 = a$ | $\frac{\lambda_1}{6} + \lambda_3 \cdot 7 = b$ | $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 42 = c$

Vamos a darnos cuenta de que:

$\lambda_2 + \pi \cdot \lambda_3 = d$

$$\cancel{\lambda_1\left(\frac{5}{42}x^3 + \lambda_2 \cdot 1\frac{1}{6}x^2 + x\right) + \lambda_3(5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi) = p}$$

$\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2 + \lambda_3 \cdot P_3 = P$

Pregunta 2a

Esto se cumple pues:

Pregunta 2a

Esto se cumple pues:

$$\lambda_1(\frac{5}{42}x^3 + \lambda_2 + \frac{1}{6}x^2 + x) + \lambda_3(5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi) =$$

Pregunta 2a

Esto se cumple pues:

$$\lambda_1(\frac{5}{42}x^3 + \lambda_2 + \frac{1}{6}x^2 + x) + \lambda_3(5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi) =$$

$$(c + \frac{-42(d-2)}{\pi})(\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x) + 2 + (\frac{d-2}{\pi})(5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi) =$$

Pregunta 2a

Esto se cumple pues:

$$\lambda_1(\frac{5}{42}x^3 + \lambda_2 + \frac{1}{6}x^2 + x) + \lambda_3(5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi) =$$

$$(c + \frac{-42(d-2)}{\pi})(\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x) + 2 + (\frac{d-2}{\pi})(5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi) =$$

$$c(\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x) + 2 + d - 2$$

Pregunta 2a

Esto se cumple pues:

$$\lambda_1(\frac{5}{42}x^3 + \lambda_2 + \frac{1}{6}x^2 + x) + \lambda_3(5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi) =$$

$$(c + \frac{-42(d-2)}{\pi})(\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x) + 2 + (\frac{d-2}{\pi})(5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi) =$$

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = c(\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x) + 2 + d - 2 = P$$

Y recordando la forma de los elementos de W, vemos que esto es lo pedido.

$$W = \langle c \rangle$$

Pregunta 2b

b) Encuentre una base de W contenida en el conjunto anterior.

Pregunta 2b

b) Encuentre una base de W contenida en el conjunto anterior.

En la parte a encontramos una combinacón lineal que permite escribir p como combinación lineal de los elementos de C. Sin embargo, es posible encontrar otra, manera más natural, que ocupa sólo 2 elementos de C. Esta es:

Pregunta 2b

b) Encuentre una base de W contenida en el conjunto anterior.

En la parte a encontramos una combinacón lineal que permite escribir p como combinación lineal de los elementos de C. Sin embargo, es posible encontrar otra, manera más natural, que ocupa sólo 2 elementos de C. Esta es:

$$p = \frac{5c}{42}x^3 + \frac{c}{6}x^2 + cx + d = c(\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x) + d \cdot 1$$

Pregunta 2b

b) Encuentre una base de W contenida en el conjunto anterior.

En la parte a encontramos una combinacón lineal que permite escribir p como combinación lineal de los elementos de C. Sin embargo, es posible encontrar otra, manera más natural, que ocupa sólo 2 elementos de C. Esta es:

$$p = \frac{5c}{42}x^3 + \frac{c}{6}x^2 + cx + d = c(\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x) + d \cdot 1$$

Luego, vemos que $B = \{\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x, 1\}$ También genera W, usando menos elementos.

Pregunta 2b

b) Encuentre una base de W contenida en el conjunto anterior.

En la parte a encontramos una combinacón lineal que permite escribir p como combinación lineal de los elementos de C. Sin embargo, es posible encontrar otra, manera más natural, que ocupa sólo 2 elementos de C. Esta es:

$$p = \frac{5c}{42}x^3 + \frac{c}{6}x^2 + cx + d = c(\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x) + d \cdot 1$$

Luego, vemos que $B = \{\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x, 1\}$ También genera W, usando menos elementos. Más aún, notemos que los elementos de B son todos li, lo cual no era el caso en C

Pregunta 2b

b) Encuentre una base de W contenida en el conjunto anterior.

En la parte a encontramos una combinacón lineal que permite escribir p como combinación lineal de los elementos de C. Sin embargo, es posible encontrar otra, manera más natural, que ocupa sólo 2 elementos de C. Esta es:

$$p = \frac{5c}{42}x^3 + \frac{c}{6}x^2 + cx + d = c(\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x) + d \cdot 1$$

Luego, vemos que $B = \{\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x, 1\}$ También genera W, usando menos elementos. Más aún, notemos que los elementos de B son todos li, lo cual no era el caso en C(propuesto xdxd).

Pregunta 2b

b) Encuentre una base de W contenida en el conjunto anterior.

En la parte a encontramos una combinacón lineal que permite escribir p como combinación lineal de los elementos de C. Sin embargo, es posible encontrar otra, manera más natural, que ocupa sólo 2 elementos de C. Esta es:

$$p = \frac{5c}{42}x^3 + \frac{c}{6}x^2 + cx + d = c(\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x) + d \cdot 1$$

Luego, vemos que $B = \{\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x, 1\}$ También genera W, usando menos elementos. Más aún, notemos que los elementos de B son todos li, lo cual no era el caso en C(propuesto xdxd).Luego, por definición, B es base de W.

Pregunta 3

Sea el siguiente conjunto:

Pregunta 3

Sea el siguiente conjunto:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

.

Pregunta 3

Sea el siguiente conjunto:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

.

Encuentre una base B de $\mathbb{R}^4$ tal que $L \subset B$.

Pregunta 3

Existe un metodo estandar para extender bases, que funciona como sigue:

1. Pillar una base conocida (B') del espacio

Pregunta 3

Existe un metodo estandar para extender bases, que funciona como sigue:

1. Pillar una base conocida (B') del espacio (en este caso usaremos la clásica base canónica)

Pregunta 3

Existe un metodo estandar para extender bases, que funciona como sigue:

1. Pillar una base conocida (B') del espacio (en este caso usaremos la clásica base canónica)
2. Crear una matriz extendida tal que cada columna represente un elemento de $B' \cup L$

Pregunta 3

Existe un metodo estandar para extender bases, que funciona como sigue:

1. Pillar una base conocida (B') del espacio (en este caso usaremos la clásica base canónica)
2. Crear una matriz extendida tal que cada columna represente un elemento de $B' \cup L$
3. Escalonar la matriz extendida.

Pregunta 3

Existe un metodo estandar para extender bases, que funciona como sigue:

1. Pillar una base conocida (B') del espacio (en este caso usaremos la clásica base canónica)
2. Crear una matriz extendida tal que cada columna represente un elemento de $B' \cup L$
3. Escalonar la matriz extendida.
4. Los elementos que constituyen la matriz triangular superior en el resultado del escalonamiento, son la base buscada.

Pregunta 3

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

1. Como dijimos, tomaremos $B' = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

Pregunta 3

1. Como dijimos, tomaremos $B' = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
2. La matriz extendida queda:

Pregunta 3

1. Como dijimos, tomaremos $B' = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
2. La matriz extendida queda:

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Pregunta 3

1. Como dijimos, tomaremos $B' = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
2. La matriz extendida queda:

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3. Ahora, tenemos que escalonarla.

Pregunta 3

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Pregunta 3

4. Con lo que nos queda que nuestra base encontrada es:

Pregunta 3

4. Con lo que nos queda que nuestra base encontrada es:

$$\boxed{B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \supseteq L}$$

Fin c:

Fin c:

Contacto:

Telegram: @Jotapeishh
Correo de U-cursos