

Auxiliar 12

Aún más valores y vectores propios

Juan Pablo Sepúlveda

15 de diciembre de 2020

Pregunta 1

Sean las siguientes matrices:

$$B_2 = B_1 + I$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & 5 \\ 5 & -10 & 7 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -7 & 5 \\ 5 & -10 & 8 \end{pmatrix}$$

- a) Encuentre los valores propios de B_1 y B_2
- b) Muestre que ambas matrices tienen los mismos subespacios propios y determine si son o no diagonalizables.

Pregunta 1a

Comencemos con B_1 , tenemos que calcular su polinomio característico.
Esto es:

Pregunta 1a

Comencemos con B_1 , tenemos que calcular su polinomio característico. Esto es:

$$\det(B_1 - \lambda I) = (2 - \lambda)((-8 - \lambda)(7 - \lambda) + 50) =$$

Pregunta 1a

Comencemos con B_1 , tenemos que calcular su polinomio característico. Esto es:

$$\begin{aligned}\det(B_1 - \lambda I) &= (2 - \lambda)((-8 - \lambda)(7 - \lambda) + 50) = \\ (2 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 56 + 50) &= \end{aligned}$$

Pregunta 1a

Comencemos con B_1 , tenemos que calcular su polinomio característico. Esto es:

$$\begin{aligned}\det(B_1 - \lambda I) &= (2 - \lambda)((-8 - \lambda)(7 - \lambda) + 50) = \\ (2 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 56 + 50) &= (2 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 6) =\end{aligned}$$

Pregunta 1a

Comencemos con B_1 , tenemos que calcular su polinomio característico. Esto es:

$$\begin{aligned}\det(B_1 - \lambda I) &= (2 - \lambda)((-8 - \lambda)(7 - \lambda) + 50) = \\ (2 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 56 + 50) &= (2 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 6) = \\ (2 - \lambda)(\lambda + 3)(\lambda - 2)\end{aligned}$$

Pregunta 1a

Comencemos con B_1 , tenemos que calcular su polinomio característico. Esto es:

$$\begin{aligned}\det(B_1 - \lambda I) &= (2 - \lambda)((-8 - \lambda)(7 - \lambda) + 50) = \\ (2 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 56 + 50) &= (2 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 6) =\end{aligned}$$

$$(2 - \lambda)(\lambda + 3)(\lambda - 2) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 3)$$

Con lo que los valores propios de B_1 son 2 y -3.

$$\alpha(2) = 2$$

$$\alpha(-3) = 1$$

Pregunta 1a

Ahora para B_2 , calculemos su polinomio:

$$\det(B_2 - \lambda I) = (3 - \lambda)((-7 - \lambda)(8 - \lambda) + 50) =$$

Pregunta 1a

Ahora para B_2 , calculemos su polinomio:

$$\begin{aligned}\det(B_2 - \lambda I) &= (3 - \lambda)((-7 - \lambda)(8 - \lambda) + 50) = \\ (3 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 56 + 50) &= \end{aligned}$$

Pregunta 1a

Ahora para B_2 , calculemos su polinomio:

$$\begin{aligned}\det(B_2 - \lambda I) &= (3 - \lambda)((-7 - \lambda)(8 - \lambda) + 50) = \\ (3 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 56 + 50) &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) =\end{aligned}$$

Pregunta 1a

Ahora para B_2 , calculemos su polinomio:

$$\begin{aligned}\det(B_2 - \lambda I) &= (3 - \lambda)((-7 - \lambda)(8 - \lambda) + 50) = \\ (3 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 56 + 50) &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) =\end{aligned}$$

$$(3 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda + 2) = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 2)$$

$$\alpha(-2) = 1 \quad \alpha(3) = 2$$

Pregunta 1a

Ahora para B_2 , calculemos su polinomio:

$$\begin{aligned}\det(B_2 - \lambda I) &= (3 - \lambda)((-7 - \lambda)(8 - \lambda) + 50) = \\ (3 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 56 + 50) &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) = \\ (2 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda + 2)\end{aligned}$$

Con lo que los valores propios de B_2 son -2 y 3.

Pregunta 1a

Ahora para B_2 , calculemos su polinomio:

$$\begin{aligned}\det(B_2 - \lambda I) &= (3 - \lambda)((-7 - \lambda)(8 - \lambda) + 50) = \\ (3 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 56 + 50) &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) = \\ (2 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda + 2)\end{aligned}$$

Con lo que los valores propios de B_2 son -2 y 3. :o

Pregunta 1b

Acá, en lugar de calcular ambos subespacios a mano, ocuparemos un truquillo de magia DIM.

Pregunta 1b

Acá, en lugar de calcular ambos subespacios a mano, ocuparemos un truquillo de magia DIM. Para esto, notemos que $B_2 = B_1 + I$, con lo que $B_2 + 2I =$

$$(B_2 - (-2)I)$$

Pregunta 1b

Acá, en lugar de calcular ambos subespacios a mano, ocuparemos un truquillo de magia DIM. Para esto, notemos que $B_2 = B_1 + I$, con lo que

$$B_2 + 2I = B_1 + I + 2I =$$



Pregunta 1b

Acá, en lugar de calcular ambos subespacios a mano, ocuparemos un truquillo de magia DIM. Para esto, notemos que $B_2 = B_1 + I$, con lo que $B_2 + 2I = B_1 + I + 2I = B_1 + 3I$, y similarmente,

$$(B_2 - 2I)$$

$$(B_1 - (-2I))$$

Pregunta 1b

Acá, en lugar de calcular ambos subespacios a mano, ocuparemos un truquillo de magia DIM. Para esto, notemos que $B_2 = B_1 + I$, con lo que $B_2 + 2I = B_1 + I + 2I = B_1 + 3I$, y similarmente, $B_2 - 3I =$

Pregunta 1b

Acá, en lugar de calcular ambos subespacios a mano, ocuparemos un truquillo de magia DIM. Para esto, notemos que $B_2 = B_1 + I$, con lo que $B_2 + 2I = B_1 + I + 2I = B_1 + 3I$, y similarmente, $B_2 - 3I = B_1 + I - 3I =$

Pregunta 1b

Acá, en lugar de calcular ambos subespacios a mano, ocuparemos un truquillo de magia DIM. Para esto, notemos que $B_2 = B_1 + I$, con lo que $B_2 + 2I = B_1 + I + 2I = B_1 + 3I$, y similarmente, $B_2 - 3I = B_1 + I - 3I = B_1 - 2I$. Qué quiere decir esto?

Pregunta 1b

Acá, en lugar de calcular ambos subespacios a mano, ocuparemos un truquillo de magia DIM. Para esto, notemos que $\bar{B}_2 = B_1 + I$ con lo que $\bar{B}_2 + 2I = B_1 + I + 2I = B_1 + 3I$, y similarmente, $\bar{B}_2 - 3I = B_1 + I - 3I = B_1 - 2I$. Qué quiere decir esto? Quiere decir que, si denotamos los subespacios propios de B_1 como A_2, A_{-3} y los de B_2 como C_3, C_{-2} , tenemos que resolver la misma matriz para encontrar A_2 que para encontrar C_3 , y lo mismo para A_{-3} con C_{-2} . Con esto, sus subespacios propios son iguales.

$$(B_2 - 2I)\vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow (B_1 - 2I)\vec{v} = 0$$
$$(B_2 + 2I)\vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow (B_1 + 3I)\vec{v} = 0$$

Pregunta 1b

Para ver si son diagonalizables vemos que:

$$B_1 + 3I = B_2 + 2I = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 5 \\ 5 & -10 & 10 \end{pmatrix}$$

Pregunta 1b

Para ver si son diagonalizables vemos que:

$$B_1 + 3I = B_2 + 2I = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 5 \\ 5 & -10 & 10 \end{pmatrix}$$

Que tiene rango 2 (la tercera fila es 2 veces la segunda, menos la primera).

Pregunta 1b

Para ver si son diagonalizables vemos que:

$$B_1 + 3I = B_2 + 2I = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 5 \\ 5 & -10 & 10 \end{pmatrix}$$

Que tiene rango 2 (la tercera fila es 2 veces la segunda, menos la primera). Similarmente:

$$B_1 - 2I = B_2 - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -10 & 5 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

Pregunta 1b

Para ver si son diagonalizables vemos que:

$$B_1 + 3I = B_2 + 2I = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 5 \\ 5 & -10 & 10 \end{pmatrix}$$

Handwritten notes: $\lambda_1(-3) = \lambda_2(-2) = 2$ and $\lambda_1(-3) = \lambda_2(-2)$

Que tiene rango 2 (la tercera fila es 2 veces la segunda, menos la primera). Similarmente:

$$B_1 - 2I = B_2 - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -10 & 5 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

Que tiene rango 1.

Handwritten notes: $\lambda_1(2) = \lambda_2(3) = 1 = \lambda_1(2) = \lambda_1(3)$

Pregunta 1b

Para ver si son diagonalizables vemos que:

$$B_1 + 3I = B_2 + 2I = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 5 \\ 5 & -10 & 10 \end{pmatrix}$$

Que tiene rango 2 (la tercera fila es 2 veces la segunda, menos la primera). Similarmente:

$$B_1 - 2I = B_2 - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -10 & 5 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

Que tiene rango 1. Con esto podemos ver que para ambas matrices se cumple la igualdad de multiplicidades para todos sus valores propios

Pregunta 1b

Para ver si son diagonalizables vemos que:

$$B_1 + 3I = B_2 + 2I = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 5 \\ 5 & -10 & 10 \end{pmatrix}$$

Que tiene rango 2 (la tercera fila es 2 veces la segunda, menos la primera). Similarmente:

$$B_1 - 2I = B_2 - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -10 & 5 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

Que tiene rango 1. Con esto podemos ver que para ambas matrices se cumple la igualdad de multiplicidades para todos sus valores propios (**Propuesto:** chequearlo y diagonalizar B_1 y B_2).

Pregunta 2

Sean E y F matrices de 7×7 . Sean ρ_1, ρ_2 los valores propios de E y δ_1, δ_2 los valores propios de F , tales que $\gamma_E(\rho_1) = \gamma_F(\delta_1) = 5$ y $\gamma_E(\rho_2) = \gamma_F(\delta_2) = 2$.

- a) ¿Son diagonalizables E y F ? Justifique.
- b) Muestre que si E y F tienen los mismos sub-espacios propios, entonces $EF = FE$.

Pregunta 2a

Como no disponemos de la matriz E ni de la matriz F , tendremos que acudir a las multiplicidades para ver si estas matrices son diagonalizables. En efecto, recordando que los subespacios propios solo intersectan en el vector 0 , tenemos la siguiente propiedad (vista en el apunte):

Pregunta 2a

Como no disponemos de la matriz E ni de la matriz F , tendremos que acudir a las multiplicidades para ver si estas matrices son diagonalizables. En efecto, recordando que los subespacios propios solo intersectan en el vector 0 , tenemos la siguiente propiedad (vista en el apunte): Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ es diagonalizable $\iff$ la suma de sus multiplicidades geométricas es n . En este caso, esto se tiene para ambas matrices, pues:

Pregunta 2a

Como no disponemos de la matriz E ni de la matriz F , tendremos que acudir a las multiplicidades para ver si estas matrices son diagonalizables. En efecto, recordando que los subespacios propios solo intersectan en el vector 0 , tenemos la siguiente propiedad (vista en el apunte): Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ es diagonalizable $\iff$ la suma de sus multiplicidades geométricas es n . En este caso, esto se tiene para ambas matrices, pues:

$$\gamma_E(\rho_1) + \gamma_E(\rho_2) = \gamma_F(\delta_1) + \gamma_F(\delta_2) = 5 + 2 = 7 = n$$

Pregunta 2a

Como no disponemos de la matriz E ni de la matriz F , tendremos que acudir a las multiplicidades para ver si estas matrices son diagonalizables. En efecto, recordando que los subespacios propios solo intersectan en el vector 0 , tenemos la siguiente propiedad (vista en el apunte): Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ es diagonalizable $\iff$ la suma de sus multiplicidades geométricas es n . En este caso, esto se tiene para ambas matrices, pues:

$$\gamma_E(\rho_1) + \gamma_E(\rho_2) = \gamma_F(\delta_1) + \gamma_F(\delta_2) = 5 + 2 = 7$$

Con esto, demostramos lo pedido.

Pregunta 2b

Si tanto E como F tienen los mismos subespacios propios, podemos ver que:

Pregunta 2b

$$W_{P_1}^E = W_{P_1}^F$$

$$y \quad W_{P_2}^E = W_{P_2}^F$$

$$B_1, B_2 \\ (|||||) = P$$

Si tanto E como F tienen los mismos subespacios propios, podemos ver que:

$$E = PD_1P^{-1}$$

$$F = PD_2P^{-1}$$

→ Misma
"P"

Luego:

$$EF =$$

Pregunta 2b

Si tanto E como F tienen los mismos subespacios propios, podemos ver que:

$$E = PD_1P^{-1} \quad F = PD_2P^{-1}$$

Luego:

$$EF = PD_1 \cancel{P^{-1}P} D_2 P^{-1} =$$

Pregunta 2b

Si tanto E como F tienen los mismos subespacios propios, podemos ver que:

$$E = PD_1P^{-1} \quad F = PD_2P^{-1}$$

Luego:

$$EF = PD_1P^{-1}PD_2P^{-1} = PD_1D_2P^{-1} =$$

Pregunta 2b

Si tanto E como F tienen los mismos subespacios propios, podemos ver que:

$$E = PD_1P^{-1} \quad F = PD_2P^{-1}$$

Luego:

$$\begin{aligned} EF &= PD_1P^{-1}PD_2P^{-1} = PD_1D_2P^{-1} = PD_2D_1P^{-1} \\ &= \end{aligned}$$

Pregunta 2b

Si tanto E como F tienen los mismos subespacios propios, podemos ver que:

$$E = PD_1P^{-1} \quad F = PD_2P^{-1}$$

Luego:

$$\begin{aligned} EF &= PD_1P^{-1}PD_2P^{-1} = PD_1D_2P^{-1} = PD_2^{\mathbf{I}}D_1P^{-1} \\ &= \underbrace{PD_2P^{-1}}_F \underbrace{PD_1P^{-1}}_E = FE \end{aligned}$$

Pregunta 2b

Si tanto E como F tienen los mismos subespacios propios, podemos ver que:

$$E = PD_1P^{-1} \quad F = PD_2P^{-1}$$

Luego:

$$\begin{aligned} EF &= PD_1P^{-1}PD_2P^{-1} = PD_1D_2P^{-1} = PD_2D_1P^{-1} \\ &= PD_2P^{-1}PD_1P^{-1} = FE \end{aligned}$$

Con lo que probamos lo pedido.

Pregunta 3

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- a) Determine el polinomio característico de A y verifique que $\lambda = 1$ es uno de sus valores propios.
- b) Determine los valores y vectores propios de A , y si es definida positiva y/o invertible.
- c) Construya una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A .
- d) Diagonalice A , esto es, encuentre la descomposición $A = PDP^t$

Pregunta 3

Por qué A es diagonalizable?

Pregunta 3

Por qué A es diagonalizable? **Porque es simétrica.**

Pregunta 3a

Calculemos el polinomio de A :

$$\det(A - \lambda I) =$$

Pregunta 3a

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Calculemos el polinomio de A :

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)((3 - \lambda)(4 - \lambda) - 1) - 2(2(4 - \lambda) - 1) + (2 - (3 - \lambda))$$

Pregunta 3a

Calculemos el polinomio de A :

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= (3 - \lambda)((3 - \lambda)(4 - \lambda) - 1) - 2(2(4 - \lambda) - 1) + (2 - (3 - \lambda)) \\ &= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 11) - 5(3 - \lambda)\end{aligned}$$

Pregunta 3a

Calculemos el polinomio de A :

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= (3 - \lambda)((3 - \lambda)(4 - \lambda) - 1) - 2(2(4 - \lambda) - 1) + (2 - (3 - \lambda)) \\ &= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 11) - 5(3 - \lambda) \\ &= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6)\end{aligned}$$

Pregunta 3a

Calculemos el polinomio de A :

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= (3 - \lambda)((3 - \lambda)(4 - \lambda) - 1) - 2(2(4 - \lambda) - 1) + (2 - (3 - \lambda)) \\ &= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 11) - 5(3 - \lambda) \\ &= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6) = (3 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 6)\end{aligned}$$

Pregunta 3a

Calculemos el polinomio de A :

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= (3 - \lambda)((3 - \lambda)(4 - \lambda) - 1) - 2(2(4 - \lambda) - 1) + (2 - (3 - \lambda)) \\ &= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 11) - 5(3 - \lambda) \\ &= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6) = (3 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 6)\end{aligned}$$

Con lo que vemos que 1 es un valor propio de A .

Pregunta 3b

$$\Delta = 0,13,66$$

Veamos que:

$\lambda = 1$ La matriz $A - \lambda I$ queda:

Pregunta 3b

Veamos que:

$\lambda = 1$ La matriz $A - \lambda I$ queda:

$$\cancel{A} - I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pregunta 3b

Veamos que:

$\lambda = 1$ La matriz $A - \lambda I$ queda:

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pregunta 3b

Veamos que:

$\lambda = 1$ La matriz $A - \lambda I$ queda:

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} -5z &= 0 \\ \Rightarrow z &= 0 \end{aligned}$$

Que tiene como base al vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 0 \\ \Rightarrow x &= -y \end{aligned}$$

Pregunta 3b

Por otra parte:

$\lambda = 3$ La matriz $A - \lambda I$ queda:

Pregunta 3b

Por otra parte:

$\lambda = 3$ La matriz $A - \lambda I$ queda:

$$\begin{matrix} \cancel{A} \\ A - \cancel{3I} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 3b

Por otra parte:

$\lambda = 3$ La matriz $A - \lambda I$ queda:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 3b

Por otra parte:

$\lambda = 3$ La matriz $A - \lambda I$ queda:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Que tiene como base al vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $z = -2y$
 $\Rightarrow x + y - 2y = 0$
 $\Rightarrow x = y$

Pregunta 3b

Finalmente:

$\lambda = 6$ La matriz $A - \lambda I$ queda:

Pregunta 3b

Finalmente:

$\lambda = 6$ La matriz $A - \lambda I$ queda:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Pregunta 3b

Finalmente:

$\lambda = 6$ La matriz $A - \lambda I$ queda:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Pregunta 3b

Finalmente:

$\lambda = 6$ La matriz $A - \lambda I$ queda:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow y = z$$

Que tiene como base al vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x + y - z = 0$
 $\Rightarrow x = y$

$$w_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad w_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad w_6 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Pregunta 3b

Finalmente:

$\lambda = 6$ La matriz $A - \lambda I$ queda:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Que tiene como base al vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Con lo que encontramos bases para cada subespacio propio.

Pregunta 3c

Como A tiene todos sus subespacios propios de dimensión 1, y los vectores propios de subespacios propios distintos son ortogonales entre sí, tenemos de entrada que los vectores propios que encontramos son ortogonales entre sí, con lo que estamos listos

Pregunta 3c

como A es sim.

Como A tiene todos sus subespacios propios de dimensión 1, $\uparrow$ los vectores propios de subespacios propios distintos son ortogonales entre sí, tenemos de entrada que los vectores propios que encontramos son ortogonales entre sí, con lo que estamos listos n't.

Pregunta 3c

Como A tiene todos sus subespacios propios de dimensión 1, y los vectores propios de subespacios propios distintos son ortogonales entre sí, tenemos de entrada que los vectores propios que encontramos son ortogonales entre sí, con lo que estamos listos n't. Como se pide que la base sea **ortonormal**, necesitamos que estos vectores tengan norma 1, por lo que la base buscada realmente sería:

Pregunta 3c

Como A tiene todos sus subespacios propios de dimensión 1, y los vectores propios de subespacios propios distintos son ortogonales entre sí, tenemos de entrada que los vectores propios que encontramos son ortogonales entre sí, con lo que estamos listos n't. Como se pide que la base sea **ortonormal**, necesitamos que estos vectores tengan norma 1, por lo que la base buscada realmente sería:

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \|v\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Pregunta 3d

Como ya tenemos los valores y los vectores propios (ortonormalizados) de A , tenemos caso todo el trabajo hecho pues:

Pregunta 3d

Como ya tenemos los valores y los vectores propios (ortonormalizados) de A , tenemos caso todo el trabajo hecho pues:

$$P = (u_1 | u_2 | u_3)$$

Pregunta 3d

Como ya tenemos los valores y los vectores propios (ortonormalizados) de A , tenemos casi todo el trabajo hecho pues:

$$P = (u_1 | u_2 | u_3) \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Pregunta 3d

Como ya tenemos los valores y los vectores propios (ortonormalizados) de A , tenemos caso todo el trabajo hecho pues:

$$P = (u_1 | u_2 | u_3) \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $1 \quad 3 \quad 6$

Donde los u_i son los vectores propios ortonormalizados de A . (~~Base~~)

Pregunta 3d

Como ya tenemos los valores y los vectores propios (ortonormalizados) de A , tenemos caso todo el trabajo hecho pues:

$$P = (u_1|u_2|u_3) \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Donde los u_i son los vectores propios ortonormalizados de A . Con lo que, recordando además que $P^{-1} = P^t$ al ser P ortonormal, llegamos a que:

Pregunta 3d

Como ya tenemos los valores y los vectores propios (ortonormalizados) de A , tenemos caso todo el trabajo hecho pues:

$$P = (u_1 | u_2 | u_3) \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Donde los u_i son los vectores propios ortonormalizados de A . Con lo que, recordando además que $P^{-1} = P^t$ al ser P ortonormal, llegamos a que:

$$A = PDP^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -2 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Fin c:

Fin c:

Contacto:

Telegram: @Jotapeishh
Correo de U-cursos