

Auxiliar 10

Valores y vectores propios

Juan Pablo Sepúlveda

2 de diciembre de 2020

Pregunta 1

Sea la siguiente base de $\mathbb{R}^4$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Aplique el proceso de Gram-Schmidt sobre B para obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$

Pregunta 1

Comencemos con $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Como ya tiene norma 1 no es necesario

$\rightarrow u = v_1$

normalizarlo. Luego, tenemos que proyectar $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sobre v_1 y

normalizar. Esto es calcular $z_2 = \langle v_1, v_2 \rangle \cdot v_1$ y luego dividir $w_2 = v_2 - z_2$ por su norma.

normalizar

proyectar

restar

Pregunta 1

Comencemos con $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Como ya tiene norma 1 no es necesario

normalizarlo. Luego, tenemos que proyectar $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sobre v_1 y

normalizar. Esto es calcular $z_2 = \langle v_1, v_2 \rangle \cdot v_1$ y luego dividir $w_2 = v_2 - z_2$ por su norma. Esto es:

$$z_2 = \langle v_1, v_2 \rangle \cdot v_1 = (1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 1

Luego al normalizar $w_2 = v_2 - z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pregunta 1

Luego al normalizar $w_2 = v_2 - z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (que claramente tiene norma 2)

Pregunta 1

Luego al normalizar $w_2 = v_2 - z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (que claramente tiene norma 2)

queda $u_2 =$

Pregunta 1

'' ,

Luego al normalizar $w_2 = v_2 - z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (que claramente tiene norma 2)

queda $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pregunta 1

Ahora trabajaremos $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. vemos que:

$$z_3 = \underbrace{\langle u_1, v_3 \rangle \cdot u_1} + \underbrace{\langle u_2, v_3 \rangle \cdot u_2}$$

Pregunta 1

Ahora trabajaremos $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. vemos que:

$$z_3 = \langle u_1, v_3 \rangle \cdot u_1 + \langle u_2, v_3 \rangle \cdot u_2$$

$$= (1 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0) \cdot \begin{pmatrix} \cancel{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0) \cdot \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ \cancel{1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

u_1 u_2

Pregunta 1

Ahora trabajaremos $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. vemos que:

$$z_3 = \langle u_1, v_3 \rangle \cdot u_1 + \langle u_2, v_3 \rangle \cdot u_2$$

$$= (1 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 1

Luego:

$$w_3 = v_3 - z_3$$

Pregunta 1

Luego:

$$w_3 = v_3 - z_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 1

Luego:

$$w_3 = v_3 - z_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que tiene norma 3.

Pregunta 1

Luego:

$$w_3 = v_3 - z_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Que tiene norma 3.

Luego, al normalizar, queda $u_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pregunta 1

Finalmente nos falta procesar $v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Pregunta 1

Finalmente nos falta procesar $v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Vemos que:

$$z_4 = \langle u_1, v_4 \rangle \cdot u_1 + \langle u_2, v_4 \rangle \cdot u_2 + \langle u_3, v_4 \rangle \cdot u_3 \star$$

Pregunta 1

Finalmente nos falta procesar $v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Vemos que:

$$z_4 = \langle u_1, v_4 \rangle \cdot u_1 + \langle u_2, v_4 \rangle \cdot u_2 + \langle u_3, v_4 \rangle \cdot u_3 +$$

$$\begin{aligned} &= (1 \cdot 4 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &\quad (0 \cdot 4 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pregunta 1

Finalmente nos falta procesar $v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Vemos que:

$$z_4 = \langle u_1, v_4 \rangle \cdot u_1 + \langle u_2, v_4 \rangle \cdot u_2 + \langle u_3, v_4 \rangle \cdot u_3 +$$

$$= (1 \cdot 4 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (0 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$(0 \cdot 4 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 1

Luego:

Pregunta 1

Luego:

$$w_4 = v_4 - z_4$$

Pregunta 1

Luego:

$$w_4 = v_4 - z_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Pregunta 1

Luego:

$$w_4 = v_4 - z_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Que tiene norma 4. Luego, nos queda al normalizar que $u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pregunta 1

Así, llegamos al siguiente conjunto:

Pregunta 1

Así, llegamos al siguiente conjunto:

$$\overline{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pregunta 1

Así, llegamos al siguiente conjunto:

$$\overline{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Que es la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

Pregunta 1

Así, llegamos al siguiente conjunto:

$$\overline{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Que es la base canónica de $\mathbb{R}^4$. :o

Pregunta 2

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Se sabe que $\lambda = 3$ es valor propio de A .

- a) Dé una base de W_3 .
- b) Calcule los valores propios faltantes y sus espacios de vectores propios asociados.
- c) Dé una base ortonormal de vectores propios de A .

Pregunta 2

Antes de comenzar a abordar los problemas, notemos que A es simétrica, luego, es diagonalizable.

Pregunta 2a

Resolvamos el sistema homogéneo de $A - \lambda I$ con $\lambda = 3$:

Pregunta 2a

Resolvamos el sistema homogéneo de $A - \lambda I$ con $\lambda = 3$:

$$A - 3I|0 = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Pregunta 2a

Resolvamos el sistema homogéneo de $A - \lambda I$ con $\lambda = 3$:

$$A - 3I|0 = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Escalonando:

Pregunta 2a

Resolvamos el sistema homogéneo de $A - \lambda I$ con $\lambda = 3$:

$$A - 3I|0 = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Escalonando:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Pregunta 2a

Resolvamos el sistema homogéneo de $A - \lambda I$ con $\lambda = 3$:

$$A - 3I|0 = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Escalonando:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Luego:

Pregunta 2a

Resolvamos el sistema homogéneo de $A - \lambda I$ con $\lambda = 3$:

$$A - 3I|0 = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Escalonando:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Luego: $\boxed{x = 2y - z}$ es la ecuación que rige a W_3 . Así:

Pregunta 2a

Resolvamos el sistema homogéneo de $A - \lambda I$ con $\lambda = 3$:

$$A - 3I|0 = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Escalonando:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Luego: $x = 2y - z$ es la ecuación que rige a W_3 . Así:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Es una base de W_3

Pregunta 2b

Debemos calcular el determinante de $A - \lambda I$ y factorizarlo:

Pregunta 2b

Debemos calcular el determinante de $A - \lambda I$ y factorizarlo:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1 - \lambda & 2 \\ -1 & 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

Pregunta 2b

Debemos calcular el determinante de $A - \lambda I$ y factorizarlo:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} \underline{2-\lambda} & \underline{2} & -1 \\ \underline{2} & -1-\lambda & \underline{2} \\ -1 & 2 & \underline{2-\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\implies \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)((-1-\lambda)(2-\lambda)-4)-2(2(2-\lambda)+2)-(4-1-\lambda)$$

Pregunta 2b

Debemos calcular el determinante de $A - \lambda I$ y factorizarlo:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1 - \lambda & 2 \\ -1 & 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(A - \lambda I) &= (2 - \lambda)((-1 - \lambda)(2 - \lambda) - 4) - 2(2(2 - \lambda) + 2) - (4 - 1 - \lambda) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) - 2(-2\lambda + 6) + (\lambda - 3) \end{aligned}$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 2) + 4(\lambda - 3) + \lambda - 3$$

$$\Rightarrow (\lambda - 3)[(2 - \lambda)(\lambda + 2) + 4 + 1] = (\lambda - 3)(4 - \lambda^2 + 5)$$

$\Rightarrow$ ✓

Pregunta 2b

Debemos calcular el determinante de $A - \lambda I$ y factorizarlo:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1 - \lambda & 2 \\ -1 & 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \implies \det(A - \lambda I) &= (2 - \lambda)((-1 - \lambda)(2 - \lambda) - 4) - 2(2(2 - \lambda) + 2) - (4 - 1 - \lambda) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) - 2(-2\lambda + 6) + (\lambda - 3) \end{aligned}$$

$$= -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3)$$

$\lambda(3) = 2$ $\lambda = -3$
 $\psi(3) = 1$

Pregunta 2b

Así, el otro valor propio buscado es el -3 .

Pregunta 2b

Así, el otro valor propio buscado es el -3 . Ahora encontremos su espacio asociado:

Pregunta 2b

Así, el otro valor propio buscado es el -3 . Ahora encontremos su espacio asociado:

$$A + 3I|0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

Pregunta 2b

Así, el otro valor propio buscado es el -3 . Ahora encontremos su espacio asociado:

$$A + 3I|0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

Notemos que $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución del sistema, con lo que es base de W_{-3} .



Pregunta 2c

Tenemos que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Es base de $\mathbb{R}^3$, y sabemos que como A es simétrica, R^3 admite una base ortonormal de sus vectores propios. Para esto, debemos ocupar el método de Gram-Schmidt para ortogonalizar esta base inicial que tenemos.

Pregunta 2c

Tenemos que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Es base de $\mathbb{R}^3$, y sabemos que como A es simétrica, R^3 admite una base ortonormal de sus vectores propios. Para esto, debemos ocupar el método de Gram-Schmidt para ortogonalizar esta base inicial que tenemos.

Comenzamos normalizando $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nos queda

Pregunta 2c

Tenemos que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Es base de $\mathbb{R}^3$, y sabemos que como A es simétrica, R^3 admite una base ortonormal de sus vectores propios. Para esto, debemos ocupar el método de Gram-Schmidt para ortogonalizar esta base inicial que tenemos.

Comenzamos normalizando $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nos queda $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pregunta 2c

Luego, $w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1$

Pregunta 2c

$$\text{Luego, } w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}(-2)\frac{1}{\sqrt{5}}}_{\text{proyección}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 2c

Luego, $w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}(-2) \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 2c

Luego, $w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}(-2) \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que al normalizarlo queda $u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Pregunta 2c

Luego, $w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}(-2) \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que al normalizarlo queda $u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Como v_3 ya es ortogonal a los 2 que encontramos, basta normalizarlo para que la base buscada quede:

Pregunta 2c

Luego, $w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}(-2) \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que al normalizarlo queda $u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Como v_3 ya es ortogonal a los 2 que encontramos, basta normalizarlo para que la base buscada quede:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pregunta 2

Propuesto: chequear que estos elementos son efectivamente vectores propios de A , que son ortogonales, y que son base de $\mathbb{R}^3$

Pregunta 3

Sea A matriz **simétrica** real de 3×3 con polinomio característico $P(\lambda) = (1 - \lambda)^2(3 - \lambda)$. Si además tenemos que:

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son vectores propios de A , entonces:

- a) **[Hecho la aux pasada]** Encuentre las multiplicidades algebraicas y geométricas de los valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$. $\chi(1) = 2$
 $\chi(3) = 1$
- b) Muestre que tanto u como v son vectores propios asociados al valor propio 1.
- c) Encuentre un vector propio w asociado al valor propio 3.

Pregunta 3b

Se sabe que los vectores propios asociados a valores propios distintos **deben** ser perpendiculares. $\Leftrightarrow$ ortogonales

Pregunta 3b

Se sabe que los vectores propios asociados a valores propios distintos **deben** ser perpendiculares. Luego, basta notar que:

$$u \cdot v =$$

Pregunta 3b

Se sabe que los vectores propios asociados a valores propios distintos **deben** ser perpendiculares. Luego, basta notar que:

$$u \cdot v = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 9 \neq 0$$

Pregunta 3b

Se sabe que los vectores propios asociados a valores propios distintos **deben** ser perpendiculares. Luego, basta notar que:

$$u \cdot v = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 9 \neq 0$$

$\Rightarrow u$ y v no son ortogonales

Así, deben pertenecer al mismo espacio, y, recordando que el valor propio de multiplicidad 2 era el $\lambda = 1$, entonces: $u, v \in W_1$

Pregunta 3c

Sabemos que $w \in W_3$ **debe** ser perpendicular tanto a u como a v , con lo que basta tomar $w = u \times v$.

Pregunta 3c

Sabemos que $w \in W_3$ **debe** ser perpendicular tanto a u como a v , con lo que basta tomar $w = u \times v$.

Esto es:

Pregunta 3c

Sabemos que $w \in W_3$ **debe** ser perpendicular tanto a u como a v , con lo que basta tomar $w = u \times v$.

Esto es:

$$\det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta 3c

Sabemos que $w \in W_3$ **debe** ser perpendicular tanto a u como a v , con lo que basta tomar $w = u \times v$.

Esto es:

$$\det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\uparrow (2 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = -\uparrow \cdot -4 = \uparrow 4$$

Pregunta 3c

Sabemos que $w \in W_3$ **debe** ser perpendicular tanto a u como a v , con lo que basta tomar $w = u \times v$.

Esto es:

$$\det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Con lo que concluimos lo pedido.

Fin c:

Fin c:

Contacto:

Telegram: @Jotapeishh
Correo de U-cursos