Auxiliar 10

Valores y vectores propios

Juan Pablo Sepúlveda

2 de diciembre de 2020

Pregunta 1

Sea la siguiente matriz, para un cierto $b \in \mathbb{R}$:

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Muestre que $\lambda = 1$ es valor propio de B sin importar el valor de b.

b) Determine para qué valores de b se tiene que todos los valores propios de B son reales no negativos.

Pregunta 1a

Para esto, comencemos analizando el polinomio característico de B:

Pregunta 1a

Para esto, comencemos analizando el polinomio característico de B:

$$det\begin{pmatrix} b-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Pregunta 1a

Para esto, comencemos analizando el polinomio característico de B:

$$det\begin{pmatrix} b-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (b-\lambda)\cdot det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Pregunta 1a

Para esto, comencemos analizando el polinomio característico de B:

$$
\begin{aligned}
det\begin{pmatrix} b-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (b-\lambda)\cdot det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (b-\lambda)[-(1+\lambda)(2-\lambda)+2]
\end{aligned}
$$

Pregunta 1a

Para esto, comencemos analizando el polinomio característico de B:

$$
\begin{aligned}
det\begin{pmatrix} b-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (b-\lambda)\cdot det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (b-\lambda)[-(1+\lambda)(2-\lambda)+2] \\
&= (b-\lambda)[-(2+\lambda-\lambda^2)+2]
\end{aligned}
$$

Pregunta 1a

Para esto, comencemos analizando el polinomio característico de B:

$$
\begin{aligned}
det\begin{pmatrix} b-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (b-\lambda)\cdot det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (b-\lambda)[-(1+\lambda)(2-\lambda)+2] \\
&= (b-\lambda)[-(2+\lambda-\lambda^2)+2] \\
&= (b-\lambda)[\lambda^2-\lambda]
\end{aligned}
$$

Pregunta 1a

Para esto, comencemos analizando el polinomio característico de B:

$$
\begin{aligned}
det\begin{pmatrix} b-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (b-\lambda)\cdot det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (b-\lambda)[-(1+\lambda)(2-\lambda)+2] \\
&= (b-\lambda)[-(2+\lambda-\lambda^2)+2] \\
&= (b-\lambda)[\lambda^2-\lambda] \\
&= (b-\lambda)[\lambda(\lambda-1)]
\end{aligned}
$$

Pregunta 1a

Para esto, comencemos analizando el polinomio característico de B:

$$
\begin{aligned}
det\begin{pmatrix} b-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (b-\lambda)\cdot det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (b-\lambda)[-(1+\lambda)(2-\lambda)+2] \\
&= (b-\lambda)[-(2+\lambda-\lambda^2)+2] \\
&= (b-\lambda)[\lambda^2-\lambda] \\
&= (b-\lambda)[\lambda(\lambda-1)]
\end{aligned}
$$

Con lo que llegamos a que los valores propios de B son $\{b, 0, 1\}$, y demostramos lo pedido en P1a).

Pregunta 1a

Para esto, comencemos analizando el polinomio característico de B:

$$
\begin{aligned}
det\begin{pmatrix} b-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (b-\lambda)\cdot det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (b-\lambda)[-(1+\lambda)(2-\lambda)+2] \\
&= (b-\lambda)[-(2+\lambda-\lambda^2)+2] \\
&= (b-\lambda)[\lambda^2-\lambda] \\
&= (b-\lambda)[\lambda(\lambda-1)]
\end{aligned}
$$

Con lo que llegamos a que los valores propios de B son $\{b, 0, 1\}$, y demostramos lo pedido en P1a). Además, con esto, es directo que basta que b sea no negativo para que todos los valores propios de B sean no negativos, con lo que tenemos la P1b) inmediatamente.

Pregunta 2

Se sabe que 1 y 4 son los valores propios de la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 15 & -14 & 25 \\ 9 & -9 & 16 \end{pmatrix}$$

Muestre que C es diagonalizable.

Pregunta 2

Para esto, debemos recordar que una matriz de $\mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonalizable si y sólo si $\mathbb{K}^n$ acepta una base de vectores propios de la matriz.

Pregunta 2

Para esto, debemos recordar que una matriz de $\mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonalizable si y sólo si $\mathbb{K}^n$ acepta una base de vectores propios de la matriz. Con esto, debemos encontrar los vectores propios de C y ver si en efecto constituyen una base de $\mathbb{R}^3$. Con esto vemos que para $\lambda = 1$ debemos resolver:

Pregunta 2

Para esto, debemos recordar que una matriz de $\mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonalizable si y sólo si $\mathbb{K}^n$ acepta una base de vectores propios de la matriz. Con esto, debemos encontrar los vectores propios de C y ver si en efecto constituyen una base de $\mathbb{R}^3$. Con esto vemos que para $\lambda = 1$ debemos resolver:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 5 & 0 \\ 15 & -15 & 25 & 0 \\ 9 & -9 & 15 & 0 \end{array}\right)$$

Pregunta 2

Para esto, debemos recordar que una matriz de $\mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonalizable si y sólo si $\mathbb{K}^n$ acepta una base de vectores propios de la matriz. Con esto, debemos encontrar los vectores propios de C y ver si en efecto constituyen una base de $\mathbb{R}^3$. Con esto vemos que para $\lambda = 1$ debemos resolver:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 5 & 0 \\ 15 & -15 & 25 & 0 \\ 9 & -9 & 15 & 0 \end{array}\right)$$

Escalonando, llegamos a:

Pregunta 2

Para esto, debemos recordar que una matriz de $\mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonalizable si y sólo si $\mathbb{K}^n$ acepta una base de vectores propios de la matriz. Con esto, debemos encontrar los vectores propios de C y ver si en efecto constituyen una base de $\mathbb{R}^3$. Con esto vemos que para $\lambda = 1$ debemos resolver:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 5 & 0 \\ 15 & -15 & 25 & 0 \\ 9 & -9 & 15 & 0 \end{array}\right)$$

Escalonando, llegamos a:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Pregunta 2

Con lo que nos queda solo una ecuación:

Pregunta 2

Con lo que nos queda solo una ecuación:

$$3x - 3y + 5z = 0$$

Con lo que nos queda solo una ecuación:

$$3x - 3y + 5z = 0x = y - 5z/3$$

Así, una base del espacio solución para el sistema dado por $\lambda = 1$ es:

Pregunta 2

Con lo que nos queda solo una ecuación:

$$3x - 3y + 5z = 0x = y - 5z/3$$

Así, una base del espacio solución para el sistema dado por $\lambda = 1$ es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pregunta 2

Por otro lado, para $\lambda = 4$ nos queda el sistema:

Pregunta 2

Por otro lado, para $\lambda = 4$ nos queda el sistema:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 5 & 0 \\ 15 & -18 & 25 & 0 \\ 9 & -9 & 12 & 0 \end{array}\right)$$

Pregunta 2

Por otro lado, para $\lambda = 4$ nos queda el sistema:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 5 & 0 \\ 15 & -18 & 25 & 0 \\ 9 & -9 & 12 & 0 \end{array}\right)$$

Luego, escalonando, queda:

Pregunta 2

Por otro lado, para $\lambda = 4$ nos queda el sistema:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 5 & 0 \\ 15 & -18 & 25 & 0 \\ 9 & -9 & 12 & 0 \end{array}\right)$$

Luego, escalonando, queda:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 9 & -9 & 12 & 0 \end{array}\right)$$

Pregunta 2

Por otro lado, para $\lambda = 4$ nos queda el sistema:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 5 & 0 \\ 15 & -18 & 25 & 0 \\ 9 & -9 & 12 & 0 \end{array}\right)$$

Luego, escalonando, queda:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 9 & -9 & 12 & 0 \end{array}\right)$$

Con lo que nos quedan las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x - 3y + 4z &= 0 \\ 3y &= 5z \end{aligned}$$

Pregunta 2

Así, obtenemos que:

$$x = z/3$$

$$y = 5z/3$$

Pregunta 2

Así, obtenemos que:

$$x = z/3$$

$$y = 5z/3$$

Luego, una base del espacio de los vectores propios asociados al valor propio 4 sería:

Pregunta 2

Así, obtenemos que:

$$x = z/3$$

$$y = 5z/3$$

Luego, una base del espacio de los vectores propios asociados al valor propio 4 sería:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Y vemos que, como el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto l.i. de elementos de $\mathbb{R}^3$ y tiene cardinal 3, es una base de $\mathbb{R}^3$, con lo que C es en efecto diagonalizable, y así demostramos lo pedido.

Pregunta 3

Sea A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Y demos por sabido que sus valores propios son $0, 2$, y 6.

a) Encuentre las multiplicidades (ambas) de los valores propios de A.

b) Encuentre el polinomio característico de A

b) Encuentre una base de $\mathbb{R}^4$ dada por vectores propios de A.

c) Escriba la forma descompuesta $A = PDP^{-1}$

Pregunta 3a

Estudiemos $\ker(A - \lambda I)$ para cada λ dado.

Pregunta 3a

Estudiemos $\ker(A - \lambda I)$ para cada λ dado. Para $\lambda = 0$ es directo que la dimensión del ker es 2, pues solo hay 2 filas li en la matriz original A, con lo que la multiplicidad geométrica del valor propio 0 es de 2.

Pregunta 3a

Estudiemos $\ker(A - \lambda I)$ para cada λ dado. Para $\lambda = 0$ es directo que la dimensión del ker es 2, pues solo hay 2 filas li en la matriz original A, con lo que la multiplicidad geométrica del valor propio 0 es de 2. Por otro lado, para $\lambda = 2$ y $\lambda = 6$, debemos resolver sus sistemas asociados

Pregunta 3a

Estudiemos $\ker(A - \lambda I)$ para cada λ dado. Para $\lambda = 0$ es directo que la dimensión del ker es 2, pues solo hay 2 filas li en la matriz original A, con lo que la multiplicidad geométrica del valor propio 0 es de 2. Por otro lado, para $\lambda = 2$ y $\lambda = 6$, debemos resolver sus sistemas asociados **(Propuesto)**.

Pregunta 3a

Estudiemos $\ker(A - \lambda I)$ para cada λ dado. Para $\lambda = 0$ es directo que la dimensión del ker es 2, pues solo hay 2 filas li en la matriz original A, con lo que la multiplicidad geométrica del valor propio 0 es de 2. Por otro lado, para $\lambda = 2$ y $\lambda = 6$, debemos resolver sus sistemas asociados **(Propuesto)**.

Con ello, obtendremos que sus multiplicidades geométricas son 1 para ambos valores.

Pregunta 3a

Estudiemos $\ker(A - \lambda I)$ para cada λ dado. Para $\lambda = 0$ es directo que la dimensión del ker es 2, pues solo hay 2 filas li en la matriz original A, con lo que la multiplicidad geométrica del valor propio 0 es de 2. Por otro lado, para $\lambda = 2$ y $\lambda = 6$, debemos resolver sus sistemas asociados **(Propuesto)**.

Con ello, obtendremos que sus multiplicidades geométricas son 1 para ambos valores.

Para la algebráica, usaremos que parauna matriz de $n \times n$, las multiplicidades algebráicas de sus valores propios suman siempre n (en este caso, 4), y por otro lado, $\alpha(\lambda) \geq \gamma(\lambda)$.

Pregunta 3a

Estudiemos $\ker(A - \lambda I)$ para cada λ dado. Para $\lambda = 0$ es directo que la dimensión del ker es 2, pues solo hay 2 filas li en la matriz original A, con lo que la multiplicidad geométrica del valor propio 0 es de 2. Por otro lado, para $\lambda = 2$ y $\lambda = 6$, debemos resolver sus sistemas asociados **(Propuesto)**.

Con ello, obtendremos que sus multiplicidades geométricas son 1 para ambos valores.

Para la algebráica, usaremos que parauna matriz de $n \times n$, las multiplicidades algebráicas de sus valores propios suman siempre n (en este caso, 4), y por otro lado, $\alpha(\lambda) \geq \gamma(\lambda)$.

Con ello, necesitamos que todas las desigualdades (es decir, para cada λ) se tengan como igualdad para satisfacer la primera condición, y así encontramos las multiplicidades algebráicas.

Para esto, recordando que sabemos que:

$$\alpha(0) = 2 \qquad \alpha(2) = 1 \qquad \alpha(6) = 1$$

Simplemente basta aplicar la definición de la multiplicidad algebráica para obtener que:

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 6)\lambda^2$$

Es el polinomio característico de A.

Pregunta 3c

Esta pregunta consiste en encontrar los vectores propios de A, pues como cumple la igualdad de multiplicidades para todos sus valores propios, es diagonalizable. Así, sus vectores propios forman una base de $\mathbb{R}^4$. Con esto en mente, comencemos con $\lambda = 0$:

Pregunta 3c

Esta pregunta consiste en encontrar los vectores propios de A, pues como cumple la igualdad de multiplicidades para todos sus valores propios, es diagonalizable. Así, sus vectores propios forman una base de $\mathbb{R}^4$. Con esto en mente, comencemos con $\lambda = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pregunta 3c

Esta pregunta consiste en encontrar los vectores propios de A, pues como cumple la igualdad de multiplicidades para todos sus valores propios, es diagonalizable. Así, sus vectores propios forman una base de $\mathbb{R}^4$. Con esto en mente, comencemos con $\lambda = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pregunta 3c

Esta pregunta consiste en encontrar los vectores propios de A, pues como cumple la igualdad de multiplicidades para todos sus valores propios, es diagonalizable. Así, sus vectores propios forman una base de $\mathbb{R}^4$. Con esto en mente, comencemos con $\lambda = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con lo que podemos tomar como base de W_0 al conjunto:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pregunta 3c

Para $\lambda = 6$, vemos que:

$$A - 6I = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Como todas las filas suman 0, se ve que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ resuelve el sistema.

Pregunta 3c

Para $\lambda = 2$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Escalonando:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Pregunta 3c

Con lo que llegamos a:

Pregunta 3c

Con lo que llegamos a:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Pregunta 3c

Con lo que llegamos a:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Así, despejando, vemos que una base de W_2 es:

Pregunta 3c

Con lo que llegamos a:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Así, despejando, vemos que una base de W_2 es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pregunta 3c

Con esto, llegamos a que una de las posibles bases de $\mathbb{R}^4$ buscadas puede ser:

Pregunta 3c

Con esto, llegamos a que una de las posibles bases de $\mathbb{R}^4$ buscadas puede ser:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pregunta 3d

Para esto, recordemos que si una matriz M es diagonalizable se tiene que $M = PDP^{-1}$, donde D es la matriz diagonal que contiene los valores propios de M, y P está compuesta con los vectores propios de M por columnas **en el orden correspondiente**, esto es que, en este caso:

Pregunta 3d

Para esto, recordemos que si una matriz M es diagonalizable se tiene que $M = PDP^{-1}$, donde D es la matriz diagonal que contiene los valores propios de M, y P está compuesta con los vectores propios de M por columnas **en el orden correspondiente**, esto es que, en este caso:

$$A = PdP^{-1} = \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{W_0 \qquad W_6 \quad W_2}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}}$$

Pregunta 4

Sea A matriz diagonalizable real de 3×3 con polinomio caracteristico $P(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$. Si además tenemos que:

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son vectores propios de A, entonces:.

a) Encuentre las multiplicidades algebráicas y geométricas de los valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$.

b) Muestre que tanto u como v son vectores propios asociados al valor propio 1.

c) Encuentre un vector propio w asociado al valor propio 3.

Pregunta 4a

Ya que disponemos del polinomio caract. es directo ver que

Pregunta 4a

Ya que disponemos del polinomio caract. es directo ver que

$$\alpha(1) = 2 \qquad \alpha(3) = 1$$

Pregunta 4a

Ya que disponemos del polinomio caract. es directo ver que

$$\alpha(1) = 2 \qquad \alpha(3) = 1$$

Y como A es diagonalizable, se tiene que $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda)$ para todo λ valor propio de A. Con esto, encontramos lo pedido.

Pregunta 4b

REDACTED

Pregunta 4b

REDACTED

To be continued en la próxima auxiliar...

Fin c:

Fin c:

Contacto:

Telegram: @Jotapeishh
Correo de U-cursos