P1. Básicos Sea $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, escríbalo en las siguientes bases:

a) $B_1 = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$
b) $B_2 = \{(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)\}$ (considere $a,b,c \neq 0$)

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_{B_1}$ y $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_{B_2}$

$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \neq \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

como bases

a) $B_1 = \left\{ \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$

→ Queremos encontrar α, β, γ

→ $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_{B_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$= \begin{array}{l} \gamma = x \\ \beta = y \\ \alpha = z \end{array} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_{B_1} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$

$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right\}$

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ tal que

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Misma idea que a)

$\begin{pmatrix} \alpha a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha a \\ \beta b \\ \gamma c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = x/a \\ \beta = y/b \\ \gamma = z/c \end{array} \Bigg\} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} x/a \\ y/b \\ z/c \end{pmatrix}$

P2. Hable con mi representante [C2 2018-2] Sean V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, y sean $B = \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$, $A = \{w_1, w_2, w_3, w_4\} \subset W$ bases de estos espacios vectoriales. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal cuya matriz representante en estas bases es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

i) ¿Cuáles son las coordenadas de $T(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ en la base A?

ii) . Dé una expresión de $T(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ en función de w_1, w_2, w_3, w_4.

iii) Pruebe que el $ker(M) = \{0\}$ (Visto como subespacio de $\mathbb{R}^3$)

iv) Demuestre que $ker(T) = \{0\}$ (Visto como subespacio de V) . Hallar una base de la imagen de T.

V, W ev's en $\mathbb{R}$. $B = \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$

$A = \{w_1, w_2, w_3, w_4\} \subset W$

bases.

$T : V \to W$ lineal

Representada por

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

para B, A

$T(v) = Mv \leftarrow v$ escrito en fn. de B

i) $[T(3v_1 + 2v_2 - v_3)]_A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$\underbrace{3}_{\alpha} v_1 + \underbrace{2}_{\beta} v_2 \underbrace{-}_{\gamma} v_3 \overset{B}{\simeq} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}_A \to \text{y.t.y !}$$

Como M representa a T en $(V, B) \to (W, A)$

(esto es toma $v \in V$ escrito en base B y devuelve $T(v)$ escrito en base A)

$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ es $[T(3v_1 + 2v_2 \cdot v_3)]_A$

ii) $T(3v_1 + 2v_2 - v_3) = \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 + \delta w_4 = -2w_1 + 0w_2 + 4w_3 + 5w_4$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim$

$a - 2b + c = 0 \to a = 0$

$-b = 0 \to b = 0$

$2c = 0$ } compatible $\to c = 0$

$3c = 0 \to c = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \ker(M) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

iii) $\ker(T) = \{0\}$ $\quad (0 \in V)$

TNI: $\underbrace{\dim(V)}_{3} = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T))$ (#)

por enunciado

T. lineal siempre se caracteriza por su acción en la base del espacio de partida

(*) $\Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{Im}(T) = \overbrace{\langle \{T(v_1) ; T(v_2) ; T(v_3)\} \rangle}^{I}}$ (☆)

sea $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V$

(β) $\subseteq$ $T(v) = T(av_1 + bv_2 + cv_3) = aT(v_1) + bT(v_2) + cT(v_3) \in I$

$\supseteq$ $aT(v_1) + bT(v_2) + cT(v_3) = T(\underbrace{av_1 + bv_2 + cv_3}_{V}) \in \operatorname{Im}(T)$

(☆) $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$\dim(\operatorname{Im}(T)) = 3 \Rightarrow$ TNI $\dim(\ker(T)) = 0$

$\Longrightarrow \ker(T) = \{0\} \subseteq V$

P3. Se nos va de las manos??!?!?!? Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Estudie si A, B son matrices invertibles.

b) ¿Pueden A y B ser matrices representantes de una misma transformación lineal L con respecto a distintas bases?

c) Encuentre Im y Ker de T_B, la transformación representada por B, y las dimensiones de dichos espacios.

a) • A es invertible porque está escalonada y tiene diagonal sin ceros.

• B NO es invertible porque tiene una fila de 0's

b) NO, porque $\boxed{\text{Matriz invertible} \Leftrightarrow \text{T.L. biyectiva}}$

M rep T
Q rep L

$T \circ L \xrightarrow{rep} M \cdot Q$

$T \circ T^{-1} \Rightarrow M \cdot M^{-1} = I$

c) $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Im (T_B) y Ker (T_B)

Ker: $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\hookrightarrow b = -d$

$\Rightarrow (2) -2d - c + d = 0 \Rightarrow c = -d$

(1) $3a - 3d - \cancel{d} + \cancel{d} = 0$
$\Rightarrow a = d$

$\Rightarrow \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \text{Ker}(T_B)$

T.N.I $\dim(\text{Im}(T_B)) = 3$

Im $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 3b + c + d \\ 2b + d - c \\ 0 \\ b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}$

$\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

$b = 0$, $d = \gamma$, $c = \gamma - \beta$ $\quad a = \dfrac{\alpha - 2\gamma + \beta}{3}$

$d = 0$, $b = \gamma$, $2b + d - c = \beta$, $2\gamma - c = \beta \Rightarrow c = 2\gamma - \beta$ $\quad \Big|\; 3a + 3\gamma + 2\gamma - \beta = \alpha$, $a = \dfrac{\alpha - 5\gamma + \beta}{3}$