MA1102-4 Álgebra lineal
Profesor: Alejandro Maass
Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 7: Teorema Núcleo-Imagen + Repaso C1

28 de octubre de 2020

P1. Te ene i Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$, y $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

a) Demuestre que B es base de $\mathbb{R}^4$.

b) Argumente que $dim(Im(T) \geq 2$. Suponiendo además que $Im(T) \subseteq ker(T)$, calcule las dimensiones de $ker(T)$ y $Im(T)$. Dé bases de la imagen y del núcleo de la transformación T.

c) Demuestre que no existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Im(T) = ker(T)$.

P2. Algo de abstracción Sea V un espacio vectorial, sobre $\mathbb{R}$, de dimensión n. Sea $U \subset V$ un subespacio vectorial de dimensión $n - 1$.

a) Probar que para todo $v \notin U$ se tiene $U \oplus \langle\{v\}\rangle = V$.

b) Sea S subespacio de V tal que S no está contenido en U. Probar que $S + U = V$. Calcular la dimensión de $S \cap U$ en función de la dimensión de S.

P3. La mega pregunta máxima final de la muerte: Sea la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\0 & 3 & 4\\1 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

a) Compruebe si M es invertible, y de serlo, calcule su inversa.

b) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la función definida como:

$$T(v) = M \cdot v$$

Pruebe que T es una transformación lineal.

c) Encuentre ker(T), Im(T), bases de éstos y sus dimensiones.

d) Concluya que T es un isomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en sí mismo.

e) **Propuesto** muestre que T^{-1}, la inversa de T, cumple:

$$T^{-1}(v) = M^{-1} \cdot v$$