Auxiliar 6

Transformaciones lineales

Juan Pablo Sepúlveda

14 de octubre de 2020

Pregunta 1

Sea $T : V \to \mathbb{R}$ una función, donde V es un ev de $\mathbb{R}$, tal que cumple:

Pregunta 1

Sea $T : V \to \mathbb{R}$ una función, donde V es un ev de $\mathbb{R}$, tal que cumple:

$$\forall u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R} \;\; T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$$

Pregunta 1

Sea $T : V \to \mathbb{R}$ una función, donde V es un ev de $\mathbb{R}$, tal que cumple:

$$\forall u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R} \;\; T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$$

Definimos:

Pregunta 1

Sea $T : V \to \mathbb{R}$ una función, donde V es un ev de $\mathbb{R}$, tal que cumple:

$$\forall u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R} \;\; T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$$

Definimos:

$$K = \left\{ k \in V \;\middle|\; T(k) = 0 \right\}$$

Demuestre que K es un espacio vectorial.

Pregunta 1

Antes de comenzar con las matracas, notemos que T es una función que cumple algo bastante particular...

Pregunta 1

Antes de comenzar con las matracas, notemos que T es una función que cumple algo bastante particular...

Efectivamente, T es , por definición, una transformación lineal de un espacio vectorial V.

Pregunta 1

Antes de comenzar con las matracas, notemos que T es una función que cumple algo bastante particular...

Efectivamente, T es , por definición, una transformación lineal de un espacio vectorial V.

Más aún, de esto podemos ver que, también por definición:

Pregunta 1

Antes de comenzar con las matracas, notemos que T es una función que cumple algo bastante particular...

Efectivamente, T es , por definición, una transformación lineal de un espacio vectorial V.

Más aún, de esto podemos ver que, también por definición: $K = Ker(T)$.

Pregunta 1

Antes de comenzar con las matracas, notemos que T es una función que cumple algo bastante particular...

Efectivamente, T es , por definición, una transformación lineal de un espacio vectorial V.

Más aún, de esto podemos ver que, también por definición: $K = Ker(T)$.

Por lo tanto, básicamente, vamos a probar que el kernel de una transformación lineal es siempre un espacio vectorial.

Pregunta 1

Con todo lo anterior en mente, vamos a atacar la pregunta misma.

Pregunta 1

Con todo lo anterior en mente, vamos a atacar la pregunta misma.

Como $K \subseteq V$, y V es un espacio vectorial, basta ocupar caracterización compacta.

Pregunta 1

Con todo lo anterior en mente, vamos a atacar la pregunta misma.

Como $K \subseteq V$, y V es un espacio vectorial, basta ocupar caracterización compacta.

Sean entonces $k, n \in K, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Pregunta 1

Con todo lo anterior en mente, vamos a atacar la pregunta misma.

Como $K \subseteq V$, y V es un espacio vectorial, basta ocupar caracterización compacta.

Sean entonces $k, n \in K, \ \ \lambda \in \mathbb{R}$. Queremos ver que $T(k + \lambda n) = 0$.

Pregunta 1

Con todo lo anterior en mente, vamos a atacar la pregunta misma.

Como $K \subseteq V$, y V es un espacio vectorial, basta ocupar caracterización compacta.

Sean entonces $k, n \in K, \ \lambda \in \mathbb{R}$. Queremos ver que $T(k + \lambda n) = 0$. En efecto:

Pregunta 1

Con todo lo anterior en mente, vamos a atacar la pregunta misma.

Como $K \subseteq V$, y V es un espacio vectorial, basta ocupar caracterización compacta.

Sean entonces $k, n \in K, \;\; \lambda \in \mathbb{R}$. Queremos ver que $T(k + \lambda n) = 0$. En efecto:

$$T(k + \lambda n)$$

Pregunta 1

Con todo lo anterior en mente, vamos a atacar la pregunta misma.

Como $K \subseteq V$, y V es un espacio vectorial, basta ocupar caracterización compacta.

Sean entonces $k, n \in K, \ \ \lambda \in \mathbb{R}$. Queremos ver que $T(k + \lambda n) = 0$. En efecto:

$$T(k + \lambda n) = \overset{0}{\cancel{T(k)}} + \lambda \overset{0}{\cancel{T(n)}}$$

Pregunta 1

Con todo lo anterior en mente, vamos a atacar la pregunta misma.

Como $K \subseteq V$, y V es un espacio vectorial, basta ocupar caracterización compacta.

Sean entonces $k, n \in K, \ \ \lambda \in \mathbb{R}$. Queremos ver que $T(k + \lambda n) = 0$. En efecto:

$$T(k + \lambda n) = T(k) + \lambda T(n) = 0 + \lambda 0 = 0$$

Con todo lo anterior en mente, vamos a atacar la pregunta misma.

Como $K \subseteq V$, y V es un espacio vectorial, basta ocupar caracterización compacta.

Sean entonces $k, n \in K, \;\; \lambda \in \mathbb{R}$. Queremos ver que $T(k + \lambda n) = 0$. En efecto:

$$T(k + \lambda n) = T(k) + \lambda T(n) = 0 + \lambda 0 = 0$$

Con lo que probamos lo pedido.

Pregunta 2

Sea $Tr : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$Tr(M) := \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$$

Esto es, la sumatoria de los coeficientes de la diagonal de la matriz.
Muestre que Tr es una transformación lineal.

Pregunta 2

Para esto veamos por definición.

Pregunta 2

Para esto veamos por definición. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

Pregunta 2

Para esto veamos por definición. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

$$Tr(A+B) := \sum_{i=1}^{n} (a+b)_{ii}$$

Pregunta 2

Para esto veamos por definición. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

$$Tr(A+B) := \sum_{i=1}^{n}(a+b)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$$

Pregunta 2

Para esto veamos por definición. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

$$Tr(A+B) := \sum_{i=1}^{n}(a+b)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} =: Tr(A) + Tr(B)$$

Pregunta 2

Para esto veamos por definición. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

$$Tr(A+B) := \sum_{i=1}^{n}(a+b)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} =: Tr(A) + Tr(B)$$

$$Tr(\lambda A) := \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} =: \lambda Tr(A)$$

Pregunta 2

Para esto veamos por definición. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

$$Tr(A+B) := \sum_{i=1}^{n}(a+b)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} =: Tr(A) + Tr(B)$$

$$Tr(\lambda A) := \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} =: \lambda Tr(A)$$

Con lo que vemos que Tr es, efectivamente, una transformación lineal.

Pregunta 3

Considere la transformación

$$\begin{aligned} T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) \\ p &\longrightarrow T(p) := (x^2 + x + 1) \cdot p(x). \end{aligned}$$

Recordando que $\mathbb{P}_k(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de los polinomios a coeficientes reales, de grado menor o igual a k.

Pregunta 3

Considere la transformación

$$\begin{aligned} T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) \\ p &\longrightarrow T(p) := (x^2 + x + 1) \cdot p(x). \end{aligned}$$

Recordando que $\mathbb{P}_k(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de los polinomios a coeficientes reales, de grado menor o igual a k.

a) Demuestre que T es lineal.

Pregunta 3

Considere la transformación

$$\begin{aligned} T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) \\ p &\longrightarrow T(p) := (x^2 + x + 1) \cdot p(x). \end{aligned}$$

Recordando que $\mathbb{P}_k(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de los polinomios a coeficientes reales, de grado menor o igual a k.

a) Demuestre que T es lineal.

b) Encuentre una base y la dimensión de $Ker(T)$.

Pregunta 3

Considere la transformación

$$\begin{aligned} T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) \\ p &\longrightarrow T(p) := (x^2 + x + 1) \cdot p(x). \end{aligned}$$

Recordando que $\mathbb{P}_k(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de los polinomios a coeficientes reales, de grado menor o igual a k.

a) Demuestre que T es lineal.

b) Encuentre una base y la dimensión de $Ker(T)$.

c) Determine una base de $Im(T)$ y calcule el rango de T.

Pregunta 3

Considere la transformación

$$\begin{aligned} T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) \\ p &\longrightarrow T(p) := (x^2 + x + 1) \cdot p(x). \end{aligned}$$

Recordando que $\mathbb{P}_k(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de los polinomios a coeficientes reales, de grado menor o igual a k.

a) Demuestre que T es lineal.

b) Encuentre una base y la dimensión de $Ker(T)$.

c) Determine una base de $Im(T)$ y calcule el rango de T.

d) Estudie inyectividad, epiyectividad y biyectividad de T.

Pregunta 3a

a) Demuestre que T es lineal.

a) Demuestre que T es lineal.

Para esto, procedemos igual a la pregunta anterior, por definición.

Pregunta 3a

a) Demuestre que T es lineal.

Para esto, procedemos igual a la pregunta anterior, por definición. Sean $p, q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}), \ \ \lambda \in \mathbb{R}$:

Pregunta 3a

a) Demuestre que T es lineal.

Para esto, procedemos igual a la pregunta anterior, por definición. Sean $p, q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}),\ \ \lambda \in \mathbb{R}$:

$T(p+q) :=$

Pregunta 3a

a) Demuestre que T es lineal.

Para esto, procedemos igual a la pregunta anterior, por definición. Sean $p, q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}),\ \ \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(p+q) := (x^2+x+1)(p+q)$$

a) Demuestre que T es lineal.

Para esto, procedemos igual a la pregunta anterior, por definición. Sean $p, q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}),\ \ \lambda \in \mathbb{R}$:

$p = ax^2 + bx + c$

$q = dx^2 + ex + f$

$$T(p+q) := (x^2+x+1)(p+q) = (x^2+x+1)p+(x^2+x+1)q$$

$(x^2 + x + 1)(ax^2 + bx + c + dx^2 + ex + f)$

$(x^2+x+1)p \quad + \quad (x^2+x+1)q$

$= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx^4 + ex^3 + fx^2$

$ax^3 + bx^2 + cx + dx^3 + ex^2 + fx$

$ax^2 + bx + c + dx^2 + ex + f$

Pregunta 3a

a) Demuestre que T es lineal.

Para esto, procedemos igual a la pregunta anterior, por definición. Sean $p, q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}),\ \ \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(p+q) := (x^2+x+1)(p+q) = (x^2+x+1)p+(x^2+x+1)q =: T(p)+T(q)$$

a) Demuestre que T es lineal.

Para esto, procedemos igual a la pregunta anterior, por definición. Sean $p, q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}), \ \ \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(p+q) := (x^2+x+1)(p+q) = (x^2+x+1)p+(x^2+x+1)q =: T(p)+T(q)$$

$$T(\lambda p) :=$$

Pregunta 3a

a) Demuestre que T es lineal.

Para esto, procedemos igual a la pregunta anterior, por definición. Sean $p, q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}),\ \ \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(p+q) := (x^2+x+1)(p+q) = (x^2+x+1)p+(x^2+x+1)q =: T(p)+T(q)$$

$$T(\lambda p) := (x^2 + x + 1)\lambda p$$

Pregunta 3a

a) Demuestre que T es lineal.

Para esto, procedemos igual a la pregunta anterior, por definición. Sean $p, q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}), \ \ \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(p+q) := (x^2+x+1)(p+q) = (x^2+x+1)p+(x^2+x+1)q =: T(p)+T(q)$$

$\forall \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

$$T(\lambda p) := (x^2+x+1)\lambda p = \lambda(x^2+x+1)p$$

a) Demuestre que T es lineal.

Para esto, procedemos igual a la pregunta anterior, por definición. Sean $p, q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}), \ \ \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(p+q) := (x^2+x+1)(p+q) = (x^2+x+1)p+(x^2+x+1)q =: T(p)+T(q)$$

$$T(\lambda p) := (x^2+x+1)\lambda p = \lambda\underbrace{(x^2+x+1)p}_{T(p)} =: \lambda T(p)$$

Pregunta 3a

a) Demuestre que T es lineal.

Para esto, procedemos igual a la pregunta anterior, por definición. Sean $p, q \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}),\ \ \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(p+q) := (x^2+x+1)(p+q) = (x^2+x+1)p+(x^2+x+1)q =: T(p)+T(q)$$

$$T(\lambda p) := (x^2+x+1)\lambda p = \lambda(x^2+x+1)p =: \lambda T(p)$$

Con lo que T es, en efecto, lineal.

Pregunta 3b

b) Encuentre una base y la dimensión de $Ker(T)$.

Pregunta 3b

b) Encuentre una base y la dimensión de $Ker(T)$.

Sea $p = ax^2 + bx + c$, estudiemos qué pasa cuando $T(p) = 0$.

$T(p) = 0 \Leftrightarrow (x^2+x+1)p = 0$ Con $p = ax^2+bx+c$

$\Leftrightarrow (x^2+x+1)(ax^2+bx+c) = 0 \Leftrightarrow ax^4 + bx^3 + cx^2 + ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c = 0$

$\Rightarrow ax^4 + x^3(b+a) + x^2(a+b+c) + x(b+c) + c = 0$

- $a = 0$
- $c = 0$
- $b + a = 0 \Rightarrow b = 0$
- $\boxed{p = 0} = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$

Pregunta 3b

b) Encuentre una base y la dimensión de $Ker(T)$.

Sea $p = ax^2 + bx + c$, estudiemos qué pasa cuando $T(p) = 0$.

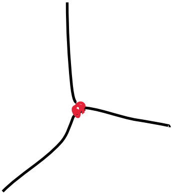
$\in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Así vemos que $T(p) = 0 \iff p := 0$. Con lo que $Ker(T) = \{0\}$. $\leq \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Pregunta 3b

b) Encuentre una base y la dimensión de $Ker(T)$.

Sea $p = ax^2 + bx + c$, estudiemos qué pasa cuando $T(p) = 0$.



- dim 3 = $\mathbb{R}^3$
- dim 2 = PLANOS
- dim 1 = RECTAS

Así vemos que $T(p) = 0 \iff p := 0$. Con lo que $Ker(T) = \{0\}$. Así, por definición, su única base es ϕ y su dimensión es 0, con lo que encontramos lo pedido.

Pregunta 3c

c) Determine una base de $Im(T)$ y calcule el rango de T.

Sea $p = ax^2 + bx + c$, vemos que $T(p)$ tiene la siguiente forma:

$$T(p) = ax^4 + (a+b)x^3 + (a+b+c)x^2 + (b+c)x + c \longrightarrow \text{Parte b)}$$

$$= a(x^4 + x^3 + x^2) + b(x^3 + x^2 + x) + c(x^2 + x + 1)$$

Luego, es claro que $\{x^4 + x^3 + x^2, x^3 + x^2 + x, x^2 + x + 1\}$ es una base de $Im(T)$, con lo que $Im(T) = 3$.

* Hint dem l.i: igualdad de polinomios

Pregunta 3d

d) Estudie inyectividad, epiyectividad y biyectividad de T.

Pregunta 3d

d) Estudie inyectividad, epiyectividad y biyectividad de T.

Vemos que T es inyectiva pues $Ker(T) = \{0\}$. $ker(T) = \{0\} \Longleftrightarrow T$ es inyectiva.

d) Estudie inyectividad, epiyectividad y biyectividad de T.

Vemos que T es inyectiva pues $Ker(T) = \{0\}$. Sin embargo, no es epiyectiva, pues, por ejemplo, el valor 1 no es alcanzable a través de T.

Pregunta 3d

d) Estudie inyectividad, epiyectividad y biyectividad de T.

Vemos que T es inyectiva pues $Ker(T) = \{0\}$. Sin embargo, no es epiyectiva, pues, por ejemplo, el valor 1 no es alcanzable a través de T. Así, T no es un isomorfismo.

Pregunta 4

Sean V, W espacios vectoriales sobre un cuerpo K. Dada una transformación lineal $L : V \longrightarrow W$ definimos su gráfico

$$G := \{(v, L(v)) \in V \times W \big| v \in V\}$$

.

a) Pruebe que G es un subespacio vectorial de $V \times W$.

b) Demuestre que V y G son isomorfos.

Pregunta 4a

a) Pruebe que G es un subespacio vectorial de $V \times W$.

Pregunta 4a

a) Pruebe que G es un subespacio vectorial de $V \times W$.

Sabemos que producto de espacios vectoriales es espacio vectorial, y G es directamente no vacío, por lo que podemos ocupar la clásica caracterización compacta.

Pregunta 4a

a) Pruebe que G es un subespacio vectorial de $V \times W$.

Sabemos que producto de espacios vectoriales es espacio vectorial, y G es directamente no vacío, por lo que podemos ocupar la clásica caracterización compacta. Sean $v, u \in V, \;\; \lambda \in \mathbb{R}$:

a) Pruebe que G es un subespacio vectorial de $V \times W$.

Sabemos que producto de espacios vectoriales es espacio vectorial, y G es directamente no vacío, por lo que podemos ocupar la clásica caracterización compacta. Sean $v, u \in V, \ \ \lambda \in \mathbb{R}$:

Vemos que:

Pregunta 4a

a) Pruebe que G es un subespacio vectorial de $V \times W$.

Sabemos que producto de espacios vectoriales es espacio vectorial, y G es directamente no vacío, por lo que podemos ocupar la clásica caracterización compacta. Sean $v, u \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

Vemos que: $L : V \to W$

$$(u, \underbrace{L(u)}_{\in W}) + \lambda(v, \underbrace{L(v)}_{\in W})$$

Pregunta 4a

a) Pruebe que G es un subespacio vectorial de $V \times W$.

Sabemos que producto de espacios vectoriales es espacio vectorial, y G es directamente no vacío, por lo que podemos ocupar la clásica caracterización compacta. Sean $v, u \in V, \ \ \lambda \in \mathbb{R}$:

Vemos que:

$$(u, L(u)) + \lambda(v, L(v)) = (u + \lambda v, L(u) + \lambda L(v))$$

Pregunta 4a

a) Pruebe que G es un subespacio vectorial de $V \times W$.

Sabemos que producto de espacios vectoriales es espacio vectorial, y G es directamente no vacío, por lo que podemos ocupar la clásica caracterización compacta. Sean $v, u \in V, \;\; \lambda \in \mathbb{R}$:

Vemos que:

$$(u, L(u)) + \lambda(v, L(v)) = (u + \lambda v, L(u) + \lambda L(v)) = \underbrace{(\overbrace{u + \lambda v}^{\in V}, L(u + \lambda v))}_{\in G}$$

.

Con lo que G cumple la caracterización compacta, y así, vemos que es un sev de $V \times W$.

Pregunta 4b

b) Demuestre que V y G son isomorfos.

Pregunta 4b

b) Demuestre que V y G son isomorfos.

Para esto, debemos encontrar una biyección entre V y G que sea lineal. Lo más natural es tomar la siguiente candidata:

$v \in V \longleftrightarrow (v, L(v))$

Pregunta 4b

b) Demuestre que V y G son isomorfos.

Para esto, debemos encontrar una biyección entre V y G que sea lineal. Lo más natural es tomar la siguiente candidata:

$$\begin{aligned} T : V &\to G \\ v &\to T(v) := (v, L(v)) \end{aligned}$$

Que es claramente lineal gracias a que L lo es. En efecto, sean $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

Pregunta 4b

b) Demuestre que V y G son isomorfos.

Para esto, debemos encontrar una biyección entre V y G que sea lineal. Lo más natural es tomar la siguiente candidata:

$$\begin{aligned} T : V &\to G \\ v &\to T(v) := (v, L(v)) \end{aligned}$$

Que es claramente lineal gracias a que L lo es. En efecto, sean $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(u + \lambda v) = (u + \lambda v, L(u + \lambda v))$$

Pregunta 4b

b) Demuestre que V y G son isomorfos.

Para esto, debemos encontrar una biyección entre V y G que sea lineal. Lo más natural es tomar la siguiente candidata:

$$\begin{aligned} T : V &\to G \\ v &\to T(v) := (v, L(v)) \end{aligned}$$

Que es claramente lineal gracias a que L lo es. En efecto, sean $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(u + \lambda v) = (u + \lambda v, L(u + \lambda v) = (u + \lambda v, L(u) + \lambda L(v))$$

Pregunta 4b

b) Demuestre que V y G son isomorfos.

Para esto, debemos encontrar una biyección entre V y G que sea lineal. Lo más natural es tomar la siguiente candidata:

$$
\begin{aligned}
T : V &\to G \\
v &\to T(v) := (v, L(v))
\end{aligned}
$$

Que es claramente lineal gracias a que L lo es. En efecto, sean $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(u+\lambda v) = (u+\lambda v, L(u+\lambda v) = (u+\lambda v, L(u)+\lambda L(v))$$

$$= (u, L(u)) + \lambda(v, L(v))$$

Pregunta 4b

b) Demuestre que V y G son isomorfos.

Para esto, debemos encontrar una biyección entre V y G que sea lineal. Lo más natural es tomar la siguiente candidata:

$$\begin{aligned} T : V &\to G \\ v &\to T(v) := (v, L(v)) \end{aligned}$$

Que es claramente lineal gracias a que L lo es. En efecto, sean $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(u + \lambda v) = (u + \lambda v, L(u + \lambda v) = (u + \lambda v, L(u) + \lambda L(v))$$

$$= (u, L(u)) + \lambda(v, L(v)) =: T(u) + \lambda T(v)$$

Pregunta 4b

b) Demuestre que V y G son isomorfos.

Para esto, debemos encontrar una biyección entre V y G que sea lineal. Lo más natural es tomar la siguiente candidata:

$$T : V \to G$$
$$v \to T(v) := (v, L(v))$$

Que es claramente lineal gracias a que L lo es. En efecto, sean $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(u+\lambda v) = (u+\lambda v, L(u+\lambda v) = (u+\lambda v, L(u)+\lambda L(v))$$

$$= (u, L(u)) + \lambda(v, L(v)) =: T(u) + \lambda T(v)$$

Con lo que T es lineal. Además es biyectiva, pues $F : G \to V$ dada por

Pregunta 4b

b) Demuestre que V y G son isomorfos.

Para esto, debemos encontrar una biyección entre V y G que sea lineal. Lo más natural es tomar la siguiente candidata:

$$T : V \to G$$
$$v \to T(v) := (v, L(v))$$

Que es claramente lineal gracias a que L lo es. En efecto, sean $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(u + \lambda v) = (u + \lambda v, L(u + \lambda v) = (u + \lambda v, L(u) + \lambda L(v))$$

$$= (u, L(u)) + \lambda(v, L(v)) =: T(u) + \lambda T(v)$$

Con lo que T es lineal. Además es biyectiva, pues $F : G \to V$ dada por

Pregunta 4b

b) Demuestre que V y G son isomorfos.

Para esto, debemos encontrar una biyección entre V y G que sea lineal. Lo más natural es tomar la siguiente candidata:

$F: G \longrightarrow V$

$(v, L(v)) \mapsto v$

$F \circ T = T \circ F = Id$

$$T : V \to G$$
$$v \to T(v) := (v, L(v))$$

$F = T^{-1}$

Que es claramente lineal gracias a que L lo es. En efecto, sean $u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(u + \lambda v) = (u + \lambda v, L(u + \lambda v) = (u + \lambda v, L(u) + \lambda L(v))$$

$$= (u, L(u)) + \lambda(v, L(v)) =: T(u) + \lambda T(v)$$

Con lo que T es lineal. Además es biyectiva, pues $F : G \to V$ dada por

Fin c:

Fin c:

Contacto:

Telegram: @Jotapeishh
Correo de U-cursos