

MA1002-8: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Alvaro Bustos

Auxiliares: Nicolas Toro



Auxiliar 12

P1. [Convergencia] Estudie la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n \geq 1} \frac{|\sin(n)|}{n^2}$

d) $\sum_{n \geq 1} \frac{1 + \sqrt{n}}{(n+1)^3 - 1}$

h) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2} \right)$

b) $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt[n]{n+1}}$

e) $\sum_{n \geq 1} (n^{\frac{1}{n}} - 1)^n$

i) $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \arctan \left(\frac{1}{2n+1} \right)$

c) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

f) $\sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

j) $\sum_{n \geq 2} \sin \left(n\pi + \frac{1}{\ln(n)} \right)$

g) $\sum_{n \geq 1} e^{-n^2}$

P2. [Propiedades] Sea $(a_n)_n$ una sucesión de términos no negativos tales que $\sum a_n$ converge

a) Pruebe que $\sum a_n^2$ converge

b) Si $a_n \neq 1 \forall n$, pruebe que las series $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ y $\sum \frac{a_n}{1-a_n}$ convergen

P3. [Teorema de Tannery] Para un entero $k \geq 0$, consideremos $f_k(n)$ una expresión en función de n . Supongamos que existen sucesiones $(L_k)_k$ y $(M_k)_k$, donde cada M_k es independiente de n y además:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_k(n) = L_k \text{ y } |f_k(n)| \leq M_k \text{ para cada } k, n.$$

Muestre que si $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ es convergente, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f_k(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k$$

P4. [Aplicación de Tannery] Use el teorema de Tannery para demostrar los siguientes límites:

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^n} \sum_{k=1}^n k^n = \frac{e}{e-1}$$

b) Para $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

c) [Propuesto]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{(k+3)n^k} = e - 2$$