MA1002-8: Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Alvaro Bustos
Auxiliares: Nicolas Toro

Guia derivadas

Algebra de derivadas

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(\lambda f)' = \lambda f'$, con λ constante
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Derivadas esenciales

- $x' = 1$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln(a)$
- $\ln(x)' = \frac{1}{x}$, para $x > 0$
- $\log_a(x)' = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}$
- $\sin(x)' = \cos(x)$
- $\cos(x)' = -\sin(x)$
- $\tan(x)' = 1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$
- $\text{cotan}(x)' = -1 - \text{cotan}^2(x) = -\text{cosec}^2(x)$
- $\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, para $|x| < 1$
- $\arccos(x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, para $|x| < 1$
- $\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $\text{arccotan}(x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

Anexo: Funciones hiperbólicas

- $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$
- $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$
- $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Anexo: Derivada de funciones hiperbólicas

- $\sinh(x)' = \cosh(x)$
- $\cosh(x)' = \sinh(x)$
- $\tanh(x)' = 1 - \tanh^2(x)$
- $\text{arcsinh}(x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $\text{arccosh}(x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, para $x > 1$
- $\text{arctanh}(x)' = \frac{1}{1-x^2}$, para $|x| < 1$
- $\text{arccotanh}(x)' = \frac{1}{1-x^2}$, para $|x| > 1$

Regla de la cadena

La regla de la cadena nos permite derivar expresiones que sean composiciones de las funciones esenciales mencionadas anteriormente.
Regla de la cadena: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Por ejemplo, la expresion $cos^3(2x)$, la podemos descomponer en las funciones:

- $f(x) = 2x$
- $g(x) = \cos(x)$
- $h(x) = x^3$

De esta forma,

$$\begin{aligned}(h \circ g \circ f)(x) &= h(g(f(x))) \\ &= h(g(2x)) \\ &= h(\cos(2x)) \\ &= \cos^3(2x)\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(\cos^3(2x))' &= [h(g(f(x)))]' \\ &= h'(g(f(x))) \cdot [g(f(x))]' \\ &= h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)\end{aligned}$$

Ahora, notamos que: $h'(x) = 3x^2 \implies h'(g(f(x))) = 3\cos(2x)^2$.
Ademas, $g'(x) = -\sin(x) \implies g'(f(x)) = -\sin(2x)$.
Tambien $f'(x) = 2$
Finalmente, $(\cos^3(2x))' = 3\cos(2x)^2 \cdot -\sin(2x) \cdot 2$.
Esto parece tedioso, pero luego uno se acostumbra a resolver estas derivadas de forma rapida.

Ejercicios: Derivar las funciones con respecto a x

Polinomios

- $f(x) = x$
- $f(x) = x^2 + x + 3$
- $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 10$
- $f(x) = 2x$
- $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$
- $f(x) = 10x^9 + 5x^3 - x^2$

Producto de funciones

- $f(x) = x\cos(x)$
- $f(x) = \tan(x)\cos(x)$
- $f(x) = \tan(x)\tan(x)$
- $f(x) = x^2\sin(x)$
- $f(x) = x\ln(x)$
- $f(x) = \cos(x)\cos(x)$

Division de funciones

- $f(x) = \frac{x}{1+x}$
- $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
- $f(x) = \frac{\tan(x)}{\arctan(x)}$
- $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
- $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
- $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\mathrm{arc}\cos(x)}$

Regla de la cadena, nivel 1

- $f(x) = \cos(2x^2)$
- $f(x) = e^{x^2}$
- $f(x) = \mathrm{arc}\cos(x^2)$
- $f(x) = \ln(x^2)$
- $f(x) = \tan(x+1)$
- $f(x) = \sin(\cos(x))$

Regla de la cadena, nivel 2

- $f(x) = (x^2 + 4x + 6)^5$
- $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$
- $f(x) = \sin(e^x)$
- $f(x) = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$
- $f(x) = \sqrt{x(2x+1)}$
- $f(x) = \sqrt[3]{1+\tan(x)}$
- $f(x) = \cos(\tan(x^2))$
- $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$
- $f(x) = e^{5\sin(x)}$
- $f(x) = \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\cos(x)}$
- $f(x) = x^2\mathrm{cotan}(x) + \frac{1}{x}$
- $f(x) = \frac{3x+\tan(x^3)}{\sin(x^2)}$

Regla de la cadena, nivel 3

- $f(x) = \frac{1}{(x^2-2x-5)^3}$
- $f(x) = \sin(\tan(\sqrt{\sin(x)}))$
- $f(x) = x\sin(\frac{1}{\cos(x)})$
- $f(x) = \ln(\sqrt{\frac{x^2+1}{x+1}})$
- $f(x) = \sqrt{3x} + \sqrt[3]{x}$
- $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$
- $f(x) = (x - \frac{1}{x})^{3/2}$
- $f(x) = e^{x\ln(x)}$
- $f(x) = e^{\sin(e^x)}$