MA1002-8: Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Alvaro Bustos
Auxiliares: Nicolas Toro

Guia C3

P1. [Weierstrass&TVI] Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continua. Mostrar que para algun $\xi \in [0,1]$ se satisface:

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}f(\xi)$$

P2. [Propiedad integral] Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funcion continua tal que $\int_a^b f(x)dx = 0$.
Muestre que $f(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]$
Hint: Argumente por contradiccion

P3. [Calcular integral] Calcule la siguiente integral:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\ln(x)\ln\left(\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\right)$$

Hint: Separe la integral de 0 a 1 y de 1 a ∞. Aplique el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$

P4. [Calcular integral] Muestre que:

$$I = \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}\ln^2(1+\sqrt{2})$$

P5. [Calcular integral] Calcule la siguiente integral:

$$\int_0^1 x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor dx$$

donde $\lfloor x \rfloor = \max_{m\leq x} m \in \mathbb{Z}$, es decir, la funcion piso
Hint: Considere el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$

P6. [Propiedad integral] Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funcion tal que $f \in \mathcal{C}^1$ y $\int_a^b f(x)dx = 0$. Muestre que:

$$\int_a^b (f(x))^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(x))^2 dx$$

Hint: Considere la funcion integral $g(x) = \int_0^x f(t)dt$

P7. [Convergencia] Encontrar todos los numeros reales α para los cuales la siguiente integral converge:

$$\int_0^\infty cos(x^\alpha)dx$$

P8. [Calcular integral] Calcule la siguiente integral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^4(x)+\cos^4(x)}dx$$

P9. [Convergencia] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funcion continua tal que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ converge.
Muestre que:

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)-f(x)|dx = 0$$

Si quitamos la hipótesis de continuidad, se sigue cumpliendo la propiedad?

P10. [Calcular integral] Calcule la siguiente integral:

$$\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{3^x}dx$$

P11. [Solido de revolucion] Encontrar el volumen del solido generado al rotar la region acotada por $y=x^2$ y $y=x$ alrededor de la recta $y=x$

P12. [TVM integral] Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funcion continua, k veces diferenciable en $x=a$ tal que $f^{(i)}(a)=$ $\forall i=1,..,k-1$ y $f^{(k)}(a)\neq 0$.

a) Muestre que para cualquier $x\in(a,b)$, existe un $c_x\in(a,x)$ para el cual:

$$\int_a^x f(t)dt = f(c_x)(x-a)$$

b) Muestre que:

$$\lim_{x\to a}\frac{c_x-a}{x-a}=\frac{1}{\sqrt[k]{k+1}}$$

Hint: Considere $g(t)=f(t)-f(a)-\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k,\ t\in[a,b]$ y aplicar L'Hopital

P13. [Propiedad integral] Sea $C\leq 0$. Consideremos S el conjunto de todas las funciones $f\in\mathcal{C}^2([0,1])$ tal que:

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=0,\quad |f''(x)|\leq C,\ \forall x\in[0,1]$$

Muestre que

a) $\displaystyle\int_0^1 x^2f(x)dx$ alcanza un maximo

b) $\displaystyle\max_{f\in S}\left|\int_0^1 x^2f(x)dx\right|=\frac{C}{360}$

Hint: Use integracion por partes dos veces para $\displaystyle\int_0^1 x^kf(x)dx,\ k=1,2,3$

P14. [Propiedad integral] Sea $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ una funcion continua estrictamente decreciente tal que $\displaystyle\lim_{x\to a^+}f(x)=\infty$. Mostrar que:

$$\int_a^b(-1)^{\lfloor f(x)\rfloor}dx=(-1)^{(m-1)}b+2\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^nf^{-1}(n)$$

con $m=\lceil f(b)\rceil$