MA1002-8: Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Alvaro Bustos
Auxiliares: Nicolas Toro

Auxiliar 7

P1. [Integral] Pruebe que las siguientes definiciones de funciones escalonadas son equivalentes:

Def 1 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es **escalonada** si existe una particion $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ tal que f es constante en cada intervalo (x_{i-1}, x_i), $\forall i = 1, ..., n$

Def 2 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es **escalonada** si existen $(A_i)_{i=1}^n \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ intervalos y $(a_i)_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ tales que:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$$

donde $\mathbb{1}_{A_i}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es la funcion: $\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$

Obs: Bajo la segunda definicion, la integral para escalonadas queda $\int\limits_a^b f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot \text{largo}(A_i)$

P2. [Monotonia] Pruebe las siguientes proposiciones sobre monotonia de integrales:

a) Sean f, g funciones escalonadas en $[a,b]$ tales que $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

b) Sean f, g funciones Riemann integrables en $[a,b]$ tales que $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, entonces:

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

P3. [Pruebe o refute] Considere las siguientes afirmaciones y demuestre o refute segun corresponda:

a) Sea f Riemann integrable. Si $\displaystyle\int_a^b |f| = 0$, entonces $f = 0$ $\forall x \in [a,b]$.

b) Si f es Riemann integrable, entonces f es continua.

c) Sean f, g Riemann integrables, entonces $(f \circ g)(x)$ es Riemann integrable

d) Si f, g son Riemann integrables tales que $f \leq g$, entonces $I_+(f) \leq I_+(g)$ y $I_-(f) \leq I_-(g)$

P4. [Extra] Criterio de integrabilidad de Lebesgue, se escapa de los contenidos del curso

Definicion: Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ de numeros reales se dice que tiene *medida nula* si para cada $\epsilon > 0$ existe una cantidad numerable de intervalos (a_i, b_i), tal que: $S \subseteq \cup_i (a_i, b_i)$ y $\sum_i (b_i - a_i) < \epsilon$

Ejemplo: Cualquier conjunto numerable de puntos $S = \{x_0, x_1, ...\}$ tiene *medida nula*, pues podemos tomar los intervalos $(x_i - \dfrac{\epsilon}{2^{i+2}}, x_i + \dfrac{\epsilon}{2^{i+2}})$ y notamos que $\sum_i \dfrac{\epsilon}{2^{i+1}} = \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$

Teorema: Una funcion f acotada en $[a,b]$ es Riemann integrable ssi el conjunto en el cual f es discontinua tiene *medida nula*

Aplicaciones: $\mathbb{1}_{[a,b]\cap\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ no es Riemann integrable, pues es discontinua en todo punto. Sin embargo, $T(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{si } x = \frac{p}{q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ es discontinua solo en los racionales, por lo que es Riemann integrable