

MA1002-8: Cálculo Diferencial e Integral**Profesor:** Alvaro Bustos**Auxiliares:** Nicolas Toro

Guia C1

P1. [Continuidad] Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ \ln(1-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Muestre que $\forall x \in [0, \infty)$, se tiene $|f(x)| \leq \sqrt{|x|}$

b) Mostrar que $f(x)$ es continua en 0

P2. [Continuidad&TVI] Considere la funcion:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

a) Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}$. Es uniforme continua?

b) Muestre que si $y \in (-1, 1)$, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\tanh(x) = y$

c) Mostrar que la ecuacion $\tanh(x) = \cos(x)$ tiene infinitas soluciones en $\mathbb{R}$

P3. [TVI] Considere la funcion $f(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$. Demuestre que f es continua y existe un unico $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$

P4. [Derivada] Mostrar que $\forall x \in \mathbb{R}$, la funcion $f(x) = |x|^3$ tiene primera y segunda derivada. Pero f''' no existe en $x = 0$

P5. [Funcion] Estudiar completamente la funcion $y = f(x)$ tal que:

$$x^3 + y^3 = 3x^2$$

P6. [Modelamiento] Entre 0°C y 30°C el volumen V de 1kg de agua a una temperatura T , esta dado aproximadamente por la formula:

$$V(T) = 1000,2 - \frac{T}{10} + \frac{T^2}{80}$$

Encuentre la temperatura a la cual el agua tiene densidad maxima.

P7. [Taylor] Calcule el polinomio de orden 2 de $f(x) = e^{x \cos(x)}$ en torno a $x = 0$

P8. [TVI&Bolzano] Considere la familia de funciones (f_n) definida por $f_n = \cos^n(x) \forall x \in \mathbb{R}$

a) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n tiene al menos un punto fijo, es decir, $f_n(\bar{x}) = \bar{x}$ para algun $\bar{x} \in \mathbb{R}$

b) Sea (x_n) una sucesion tal que x_n es un punto fijo de f_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Muestre que (x_n) tiene al menos una subsucesion convergente

P9. [TVM] Sea $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua y diferenciable en (a, b) , tal que:

$$\exists k \in (0, 1), \forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

a) Muestre que $f'(x) < 1, \forall x \in (a, b)$

b) Concluya que f tiene un unico punto fijo

P10. [Continuidad uniforme] Sean f, g, h funciones definidas como:

$$f(x) = x - [x], \quad g(x) = \sin(\pi f(x)), \quad h(x) = \cos(\pi f(x))$$

con $[x]$ la parte entera de x .

a) Estudie la continuidad y continuidad uniforme de $g(x)$ y $h(x)$ en $\mathbb{R}$

b) Estudie la continuidad y continuidad uniforme de $g(x)$ y $h(x)$ en $[0, 1]$

P11. [Derivada] Sea $c > 0$, probar que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en 0 ssi el limite $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(cx) - f(x)}{x}$ existe.

P12. [TVM] Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en $a \in \mathbb{R}$ con $f(a) = g(a)$ y $f'(a) = g'(a)$.

Probar que toda funcion $h(\cdot)$ tal que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ es derivable en a con $h'(a) = f'(a) = g'(a)$

P13. [TVM] Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, el cual cumple que:

- $f(x_0) \geq g(x_0)$
- $f'(x) \geq g'(x) \forall x \geq x_0$

Mostrar que $f(x) \geq g(x) \forall x \geq x_0$

P14. [TVM] Sea $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable. con derivada continua tal que $h'(0) = -1$.

Mostrar que existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$, se tiene que $[h(x) - h(0)]x < 0$

P15. [TVI] Suponga que f es continua en $[0, 1]$ y $f(0) = f(1)$. Sea $n \in \mathbb{N}$, mostrar que existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

P16. [TVM] Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Mostrar que la ecuacion:

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

siempre tiene una raiz entre 0 y 1.

P17. [Rolle] Mostrar que $\forall c \in \mathbb{R}$, $x^3 - 3x + c$ tiene a lo mas un raiz en $[0, 1]$

P18. [TVI&TVM] Sea f diferenciable en $[0, 1]$, con $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, mostrar que existen puntos distintos $x_1, x_2, \dots, x_n$ en $[0, 1]$ para los cuales:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{f'(x_i)} = n$$

P19. [TVI&TVM] Sea $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y diferenciable en $(0, 1)$, tal que $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$. Mostrar que existe $x_0 \in (0, 1)$ que satisface:

$$|f'(x_0)| \geq 2020 f(x_0)^{2020}$$

Hint: Considerar $g(x) = \frac{1}{f(x)^{2019}}$

P20. [Rolle] Sean $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, diferenciables en (a, b) , con $g(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$, tal que $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}$

Mostrar que existe un $c \in (a, b)$ para el cual $\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

P21. [TVM] Sea $f: \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow [-1, 1]$ continua y diferenciable en $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$. Mostrar que existe $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ que satisface:

$$|f'(x_0)| \leq 1 + f(x_0)^2$$

Hint: Considerar $g(x) = \arctan(f(x))$

P22. [Fermat] Sean $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+$. Demuestre que si $b_1^x + \dots + b_n^x \geq n \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $b_1 \cdots b_n = 1$