Taylor

Monday, October 12, 2020 1:57 PM

$$T_f^n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(\bar{x})}{i!}(x-\bar{x})^i$$

desarrollo de Taylor de f, de orden "n" centrado en $\bar{x}$.

Ejemplo:

$$T_f^1(x) = \underbrace{f(\bar{x})}_{\text{Valor de la función en el punto } \bar{x}} + \underbrace{f'(\bar{x})}_{\text{Pendiente de la función en el punto } \bar{x}}\overbrace{(x-\bar{x})}^{\text{le da el caracter de función.}}$$

$$\left(\Leftrightarrow \quad T_f^1(x-\bar{x}) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) \right)$$

Aquí es explícito que el Taylor es en torno a $\bar{x}$.

El Taylor de orden 1, se llama linearización de f.

Teorema de Taylor

.) Es una generalización del T.V.M.

$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable,

$\Longrightarrow \exists\, c \in (a,b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} = f'(c) \iff f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$$

T.V.M

.) Taylor:

$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ diferenciable,

con derivada continua

$\Longrightarrow \exists\, c \in (a,b)$:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Usualmente se aplica con a fijo, y tomando $b = x$ como variable independiente, queda:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \text{con } \underline{c \in (a,x)}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \text{con } c \in (a,x)$$

•) Corolario.

$f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^{∞}, entonces

$$f(x) = T_f^{(n)}(x) + R_n(x)$$

Mas aun, si $R_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} 0$ para $x \in Dom(f)$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x)$$

obs: no conociendo $c(x)$, igual se puede estimar

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

•) Estimar R_n

Si: $|f^{(n+1)}(y)| \leq M^{\in \mathbb{R}}$ $\forall y$ tal que $|y-a| \leq |x-a|$

$$\Rightarrow |R_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

obs: Si la desigualdad se cumple $\forall n \geq 1$, entonces

$$T_f^n(x) \xrightarrow{n \to \infty} f(x)$$

$$T_f^n(x) \xrightarrow{n \to \infty} f(x)$$