

MA1002-8: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Alvaro Bustos

Auxiliares: Nicolas Toro



Auxiliar 4

P1. [Teo de Darboux] Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y diferenciable. Entonces f' tiene la propiedad del valor intermedio, es decir, para cualquier y_0 entre $f'(a)$ y $f'(b)$, va a existir un $x_0 \in (a, b)$ para el cual $f'(x_0) = y_0$.

Ojo: La importancia del teorema radica en que no necesariamente f' es continua.

Ojo 2: Una reinterpretación del teorema es que imágenes de intervalos bajo f' siguen siendo intervalos

P2. [TVM&TVI] Sean $x_i, y_i \in (a, b)$ tal que $x_i > y_i \forall i$. Mostrar que si f es diferenciable en (a, b) , entonces existe un $c \in (a, b)$ para el cual:

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) - \sum_{k=1}^n f(y_k) = f'(c) \sum_{k=1}^n (x_k - y_k)$$

P3. [Modelamiento] Una persona se encuentra en un punto A sobre la playa de un lago circular de 4km y desea llegar a un punto C que se encuentra diametralmente opuesto a A .

La persona puede caminar a una rapidez constante de $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ y nadar a una rapidez constante de $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

- Plantee la ecuación $T = T(x)$ con $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ que describe el tiempo que demora la persona en recorrer el tramo AB nadando más el arco BC caminando en función del ángulo x
- Estudie crecimiento y concavidad de $T(x)$, bosqueje su gráfico, muestre que $T(x)$ admite un máximo global y calculelo
- Determine el valor x para llegar al punto C en el menor tiempo posible, indicando la trayectoria a seguir y en que tiempo se cubre el recorrido

P4. [Convexidad] Una función $f: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ continua y dos veces derivable en (a, b) se dirá log-convexa si $\ln(f(x))$ es convexa. Demuestre que si f es log-convexa, entonces f es convexa