MA1002-8: Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Alvaro Bustos
Auxiliares: Nicolas Toro

Auxiliar 2

P1. [TVI] Considere para cada $n \in \mathbb{N}$ el polinomio $g_n(x) = x^n + x - 1$

a) Pruebe que $\forall n \geq 1$, $g_n(x)$ tiene solo una raiz r_n positiva

b) Demuestre que la sucesión de raices (r_n) tiene una subsucesión convergente

P2. [TVI]

a) Sean $f, g\colon [0,1] \to [0,1]$ continuas y sobreyectivas. Ver que $\exists c \in [0,1]$ tal que $f(c) = g(c)$

b) Sean $f, g\colon [a,b] \to [c,d]$ continuas, con $f(a) = c = g(b)$. Ver que $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$

c) **[Propuesto]** Sea $f\colon [0,2a] \to \mathbb{R}$ continua, con $f(0) = f(2a)$. Mostrar que $\exists x, y \in [0,2a]$, con $x - y = a$, tal que $f(x) = f(y)$. (**Hint:** Considere $h(x) = f(x-a) - f(x)$)

P3. [Weierstrass] Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas, tal que $f(x) < g(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Mostrar que existe $\lambda > 0$ tal que $f(x) + \lambda \leq g(x)$

P4. [Continuidad uniforme] Estudie la continuidad uniforme en estas funciones:

a) $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, en $(0,1)$

b) $g(x) = \ln(x)$, en $(0,1)$

c) $h(x) = e^x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $\mathbb{R}$

P5. [Continuidad uniforme] Sea $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion uniformemente continua. Si A es acotado, entonces $f(A)$ tambien es acotado

P6. [Propuesto] Dados dos triángulos en el plano, muestre que existe una linea que divide a ambos en partes iguales en el sentido del area