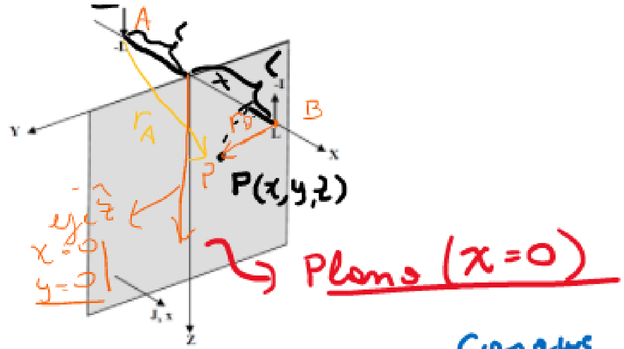
P11

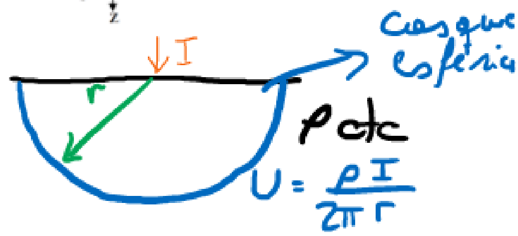
En la superficie de un semiespacio homogéneo de resistividad eléctrica Çse inyecta y recolecta corriente continua (*I*) mediante electrodos ubicados en el eje *x*, a distancias *–L* y *+L* del origen de coordenadas respectivamente.

**a)** Encuentre una expresión para el potencial eléctrico *U* en un punto cualquiera *(x,y,z)* del semiespacio.

**b)** Aplique la ley de Ohm, y encuentre una expresión para la corriente $J = J_x\, x$ que fluye a través del plano *(y-z)*.

**c)** Especialice el resultado de b) para un punto situado en el eje vertical *(z)*, y demuestre que para una profundidad *z* fija, $J_x$ alcanza un máximo para una separación de electrodos tal que $L = z / 2^{1/2} = 0.707\, z$. Explique las consecuencias de este resultado para la relación entre la penetración de un estudio eléctrico y la separación de los electrodos de corriente.




a) $U(x,y,z) = U_A + U_B$

$$r_A = \sqrt{(x+L)^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_B = \sqrt{(x-L)^2 + y^2 + z^2}$$

$$U(x,y,z) = \frac{\rho I}{2\pi r_A} + \frac{\rho(-I)}{2\pi r_B} = \frac{\rho I}{2\pi}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]$$

$$\boxed{U(x,y,z) = \frac{\rho I}{2\pi}\left[\frac{1}{((x+L)^2+y^2+z^2)^{1/2}} - \frac{1}{((x-L)^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right]}$$ a)

b) $\vec{J} = \frac{\vec{E}}{\rho} = \sigma \vec{E}$ $\quad \boxed{\vec{E} = -\nabla U}$ $\quad \vec{J} = -\frac{1}{\rho}\nabla U$

$$J_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\cancel{\rho}}\frac{\cancel{\rho} I}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]$$

$$J_x = -\frac{I}{2\pi}\left[-\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}(x+L)}{((x+L)^2+y^2+z^2)^{3/2}} \cancel{-}\left(\cancel{-}\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}(x-L)}{((x-L)^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)\right]$$

$$J_x = \frac{I}{2\pi}\left[\frac{(x+L)}{((x+L)^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{(x-L)}{((x-L)^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]$$

c) $\frac{\partial J_x}{\partial L} \overset{!}{=} 0 = \frac{I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial L}\left[\frac{(x+L)}{((x+L)^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{(x-L)}{((x-L)^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]$ $\neq 0$

$$0 = \frac{1\cdot((\cancel{x}+L)^2+\cancel{y^2}+z^2)^{3/2} - \frac{3}{\cancel{2}}((\cancel{x}+L)^2+\cancel{y^2}+z^2)^{1/2}\,\cancel{2}(\cancel{x}+L)^2}{((\cancel{x}+L)^2+\cancel{y^2}+z^2)^3} - \frac{(-1)((\cancel{x}-L)^2+\cancel{y^2}+z^2)^{3/2} - \frac{3}{\cancel{2}}((\cancel{x}-L)^2+\cancel{y^2}+z^2)^{1/2}\cdot(-\cancel{2})(x-L)^2}{((\cancel{x}+L)^2+\cancel{y^2}+z^2)^3}$$

Reemplazamos $x = y = 0$

$\Downarrow$

eje $z$.

$$0 = \frac{(L^2+z^2)^{3/2} - 3(L^2+z^2)^{1/2}\cdot L^2 + (L^2+z^2)^{3/2} - 3(L^2+z^2)^{1/2}L^2}{\cancel{(L^2+z^2)^3}}$$

$\neq 0$ $L>0$

$$0 = \cancel{2}(L^2+z^2)^{3/2} - \cancel{2}\cdot 3(L^2+z^2)^{1/2}L^2 \Big/ \frac{1}{(L^2+z^2)^{1/2}}$$

$$0 = (L^2+z^2) - 3L^2 \Rightarrow 2L^2 = z^2 \Big/ \sqrt{\phantom{x}}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{\sqrt{2}}z \simeq 0.707z}$$ c)