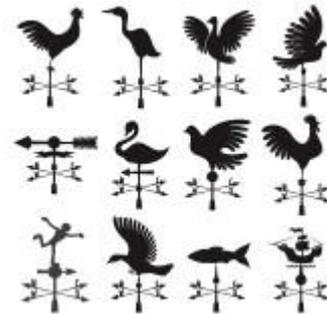


Universidad de Chile  
Departamento de Geofísica

Introducción a la Meteorología

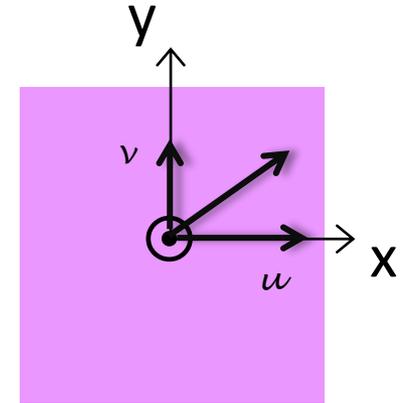
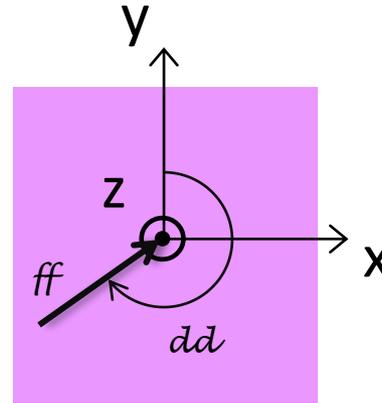
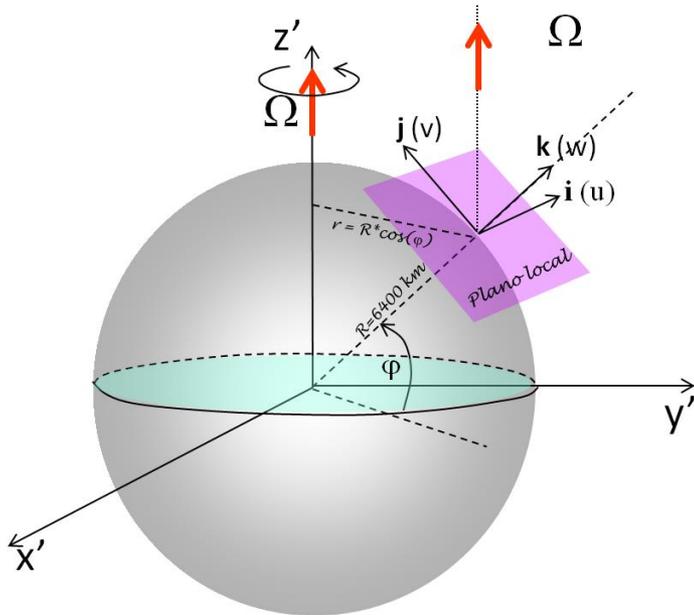
# Viento Geostrófico



Prof. René Garreaud  
[www.dgf.uchile.cl/rene](http://www.dgf.uchile.cl/rene)

# Introducción a la Meteorología – Dinámica

## UCh/FCFM/DGF – R. Garreaud



X: Dirección zonal (W-E)...Componente Zonal  $\mathbf{u} = dx/dt$

Y: Dirección Meridional (S-N) ...Componente Meridional  $\mathbf{v} = dy/dt$

Z: Dirección vertical...Componente vertical  $\mathbf{w} = dz/dt$

$$\mathbf{U} = -ff \cdot \sin(dd)$$

$$\mathbf{V} = -ff \cdot \cos(dd)$$

$$ff = \sqrt{U^2 + V^2}$$

$$dd = \text{atan}(v/u)$$

(En Matlab: `dir = mod(270-angle(u+i*v),360);`)

# Dinámica

Apuntes de H. E. de Swart

## Momentum balance; absolute frame

Newton's second law in an absolute frame

$$\frac{D_a \mathbf{u}_a}{Dt} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

$\mathbf{F}_i$  : forces (per mass unit)

Operator  $D_a/Dt$  is total time derivative in absolute frame;  
 $\mathbf{u}_a$  is velocity in absolute frame

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

=>

$$\frac{D_a \mathbf{r}}{Dt} = \frac{D\mathbf{r}}{Dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

Note: in the boxed relation  $\mathbf{r}$  can be replaced by any vector,  
in particular by  $\mathbf{u}_a$  =>

$$\begin{aligned} \frac{D_a \mathbf{u}_a}{Dt} &= \frac{D\mathbf{u}_a}{Dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_a \\ &= \frac{D}{Dt}(\mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \end{aligned}$$

# Dinámica

Apuntes de H. E. de Swart

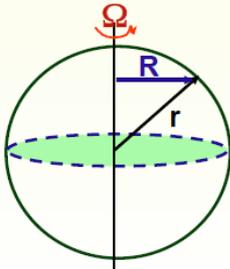
The momentum balance in a rotating frame

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{F}_i$$

Here, two apparent forces emerge:

$$-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} \quad \text{Coriolis force/mass}$$

$$-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \Omega^2 \mathbf{R} \quad \text{centrifugal force/mass}$$



$|\mathbf{R}|$  : distance to rotation axis

Thus, in this coordinate system, the Coriolis force

$$-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & -2\Omega \cos \phi & -2\Omega \sin \phi \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

**Coriolis parameter  $f$**   
(2x vertical component of  $\Omega$ )

$$= \mathbf{e}_x(-2\Omega \cos \phi w + 2\Omega \sin \phi v) - \mathbf{e}_y 2\Omega \sin \phi u + \mathbf{e}_z 2\Omega \cos \phi u$$

$$\mathbf{F}_{\text{co}} = \mathbf{e}_x(-2\Omega \cos \phi w + 2\Omega \sin \phi v) - \mathbf{e}_y 2\Omega \sin \phi u + \mathbf{e}_z 2\Omega \cos \phi u$$

Parametro de Coriolis:  $f = 2\Omega \sin(\phi)$

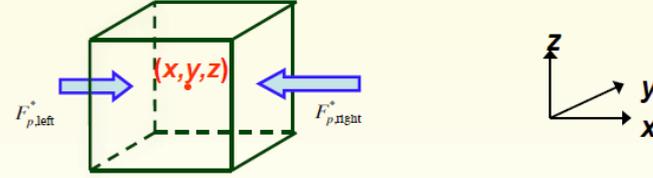
# Dinámica

Apuntes de H. E. de Swart

## Pressure gradient force

Note: pressure itself is a force per surface area. It are the spatial variations in pressure that result in a force/mass.

Derivation (fixed control volume):



Pressure force 'right' :

$$F_{p,right}^* = -p|_{(x+\frac{1}{2}\Delta x,y,z)} \Delta y \Delta z \approx -\left(p|_{(x,y,z)} + \frac{\partial p}{\partial x}|_{(x,y,z)} \frac{1}{2} \Delta x\right) \Delta y \Delta z$$

Pressure force 'left' :

$$F_{p,left}^* = p|_{(x-\frac{1}{2}\Delta x,y,z)} \Delta y \Delta z \approx \left(p|_{(x,y,z)} - \frac{\partial p}{\partial x}|_{(x,y,z)} \frac{1}{2} \Delta x\right) \Delta y \Delta z$$

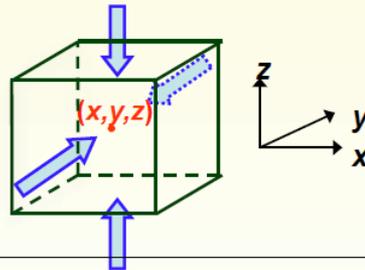
Total force/mass in x-direction:

$$F_{p,x} = \frac{F_{p,left}^* + F_{p,right}^*}{\rho \Delta x \Delta y \Delta z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Likewise, total force/mass in y- and z-direction:

$$F_{p,y} = \frac{F_{p,front}^* + F_{p,back}^*}{\rho \Delta x \Delta y \Delta z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$F_{p,z} = \frac{F_{p,down}^* + F_{p,up}^*}{\rho \Delta x \Delta y \Delta z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$



Final result in vector notation:

$$\mathbf{F}_p = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad \text{directed from high} \rightarrow \text{low pressure}$$

En Resumen...esta es la versión simplificada de la conservación de Momento en la atmosfera. Claro que no es tan simple de resolver

$$\frac{d\vec{U}_{3D}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} = \vec{g} + \vec{F}_{Grad\ Pres} + \vec{F}_{Roce}$$

Ecuación vectorial

$$\vec{V}_{3D} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

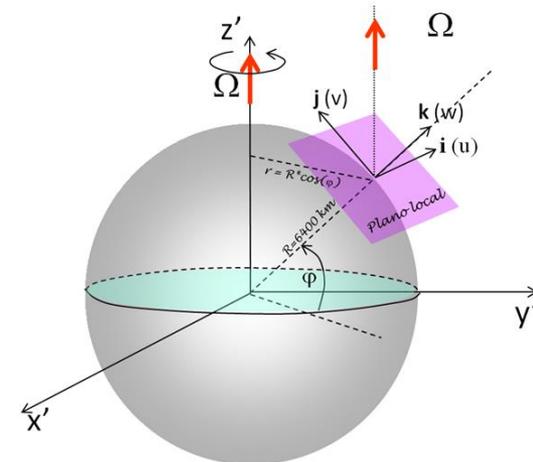
$$\frac{du}{dt} - fv + 2\Omega \cos \varphi w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_{Rx}$$

Ecuación para cada componente

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_{Ry}$$

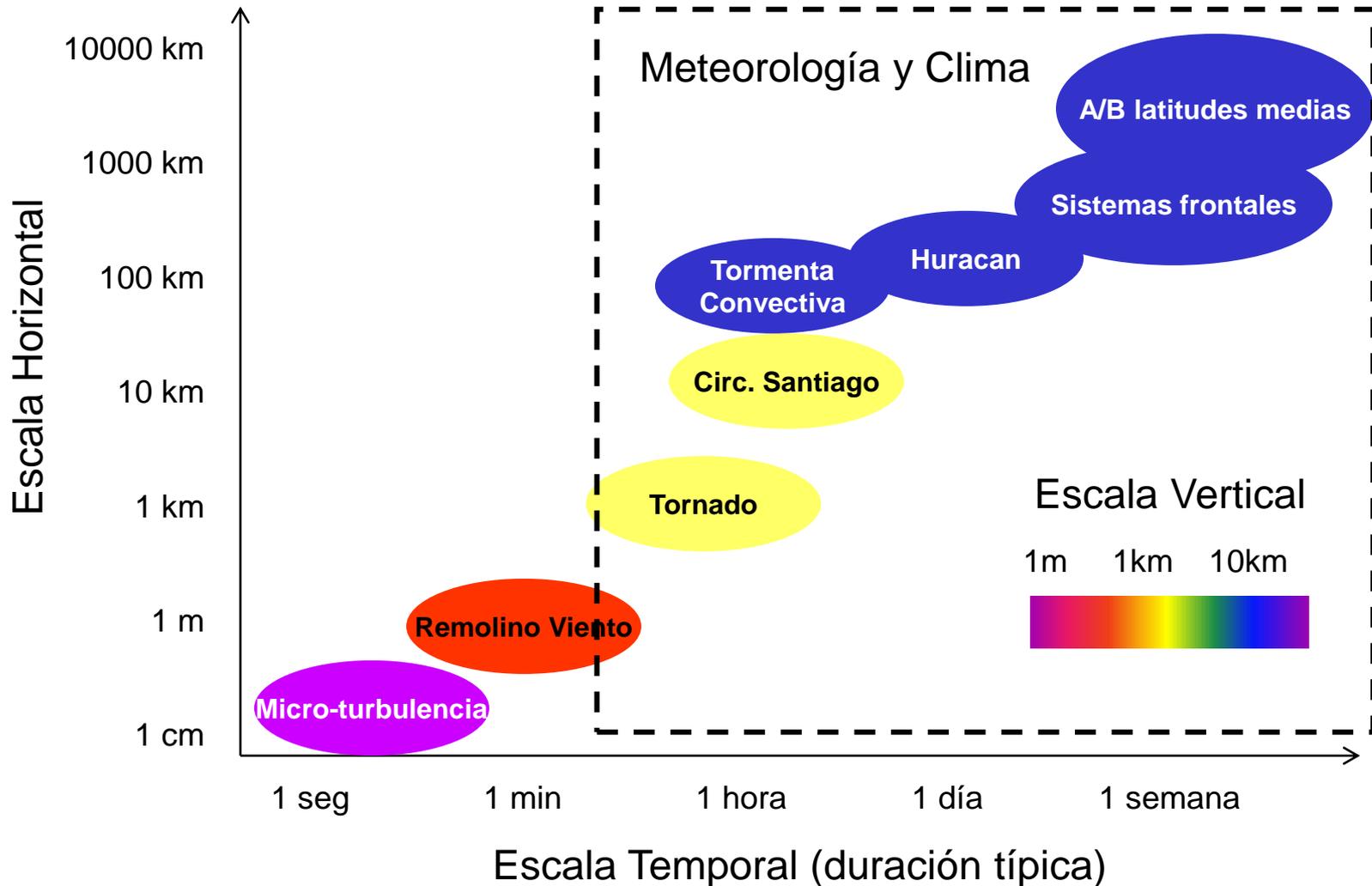
$$\frac{dw}{dt} - 2\Omega \cos \varphi u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_{Rz}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$



Para pronóstico del tiempo se emplea la forma completa de la ecuación anterior. Pero para ganar una intuición física de la circulación atmosférica se puede hacer una simplificación anterior basada en un análisis de escala...

## Escala temporal-espacial de fenómenos atmosféricos



Aquí pondremos nuestra atención en los sistemas que pueblan las latitudes medias (bajas, altas y frentes). Con sus **escalas características** podemos estimar la **magnitud típica** de las **fuerzas** en cuestión y quedarnos solo con las mas **relevantes**

## Análisis de Escala de Sistemas de Latitudes Medias

$$\begin{aligned}
 U &= 10 \text{ m s}^{-1}; & W &= 10^{-2} \text{ m s}^{-1}; \\
 L &= 10^6 \text{ m (} 10^3 \text{ km)}; & H &= 10^4 \text{ m (} 10 \text{ km)}; \\
 T &= L/U \sim 10^5 \text{ (} 1 \text{ day)}; & \delta P &= 10^3 \text{ Pa (} 10 \text{ mb)} \\
 & & \text{and } \rho^* &= 1 \text{ kg m}^{-3}.
 \end{aligned}$$

(b) vertical momentum equation (total pressure form)

$$\frac{Dw}{Dt} - 2\Omega u \cos \phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_T}{\partial z} - g$$

scales	$UW/L$	$2\Omega u \cos \phi$	$\delta P_0/(\rho H)$	$g$
orders	$10^{-7}$	$10^{-3}$	10	10

$$\vec{V}_{3D} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{V}_{3D}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\Omega \times \vec{V} + \vec{F}_{roce} + \vec{g}$$



$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g$$

Aquí pondremos nuestra atención en los sistemas que pueblan las latitudes medias (bajas, altas y frentes). Con sus **escalas características** podemos estimar la **magnitud típica** de las **fuerzas** en cuestión y quedarnos solo con las mas **relevantes**

## Análisis de Escala de Sistemas de Latitudes Medias

$$\frac{d\vec{V}_{3D}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\Omega \times \vec{V}_{3D} + \vec{F}_{roce} + \vec{g}$$

$$\vec{V}_{3D} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

(a) horizontal momentum equations

$$\frac{Du}{Dt} - 2\Omega v \sin \phi + 2\Omega w \cos \phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + 2\Omega u \sin \phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

scales	$U^2/T$	$2\Omega U \sin \phi$	$2\Omega W \cos \phi$	$\delta P/(\rho L)$
orders	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-3}$



$$\frac{d\vec{V}_{Hor}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - f\hat{k} \times \vec{V}_{Hor} + \vec{F}_{roce}$$

$$\vec{V}_{Hor} = u\hat{i} + v\hat{j}$$

Al realizar este análisis resulta que las fuerzas relevantes son la de gradiente de presión y la de coriolis. Si nos quedamos con estas fuerzas obtenemos el balance geostrófico. El vector velocidad que allí aparece NO es el viento real, sin el viento geostrófico

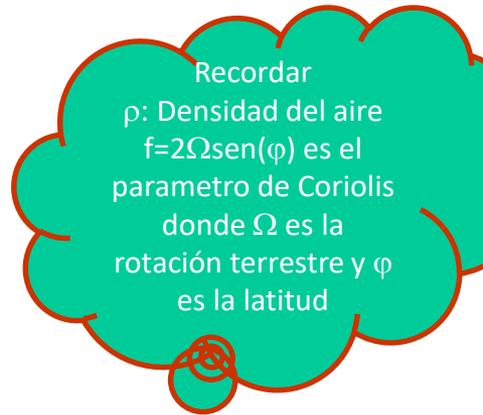
$$\frac{d\vec{U}_{\text{Hor}}}{dt} + f\hat{k} \times \vec{U}_{\text{Hor}} = -\frac{1}{\rho}\nabla_{\text{h}}p + \overrightarrow{F_{\text{roce}}}$$

Forma vectorial:

$$\vec{V}_{\text{geos}} = +\frac{1}{\rho f}\hat{k} \times \nabla_{\text{h}}p$$

Por componentes:

$$u_{\text{geos}} = -\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial y} \quad v_{\text{geos}} = +\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial x}$$



Lo bueno de esta aproximación es que permite obtener una excelente aproximación del viento real (con su dirección y magnitud) con solo conocer la distribución espacial de la presión a un cierto nivel de altura. El inconveniente es que perdimos la capacidad de pronóstico y esta aproximación solo es buena para grandes sistemas en latitudes medias.

## En Resumen....

Ecuación de Momentum  
3D en sistema tierra

$$\frac{d\vec{V}_{3D}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\Omega \times \vec{V}_{3D} + \vec{F}_{roce} + \vec{g}^* \quad \vec{V}_{3D} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

para movimientos atmosféricos en la gran escala y latitudes medias

Ecuación simplificada de  
Momentum 2D (Hor)

$$\frac{d\vec{V}_{Hor}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - f\hat{k} \times \vec{V}_{Hor} + \vec{F}_{roce} \quad \vec{V}_{Hor} = u\hat{i} + v\hat{j}$$

Si sacrificamos las aceleraciones obtenemos ecuación diagnostica

Balance geostrofico  
(Coriolis = FGP)

$$+fk \times \vec{V}_{geos} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

$$\vec{V}_{geos} = u_{geos}\hat{i} + v_{geos}\hat{j}$$

Viento geostrófico  
(forma vectorial)

$$\vec{V}_{geos} = +\frac{1}{\rho f}\hat{k} \times \nabla_{hp}$$

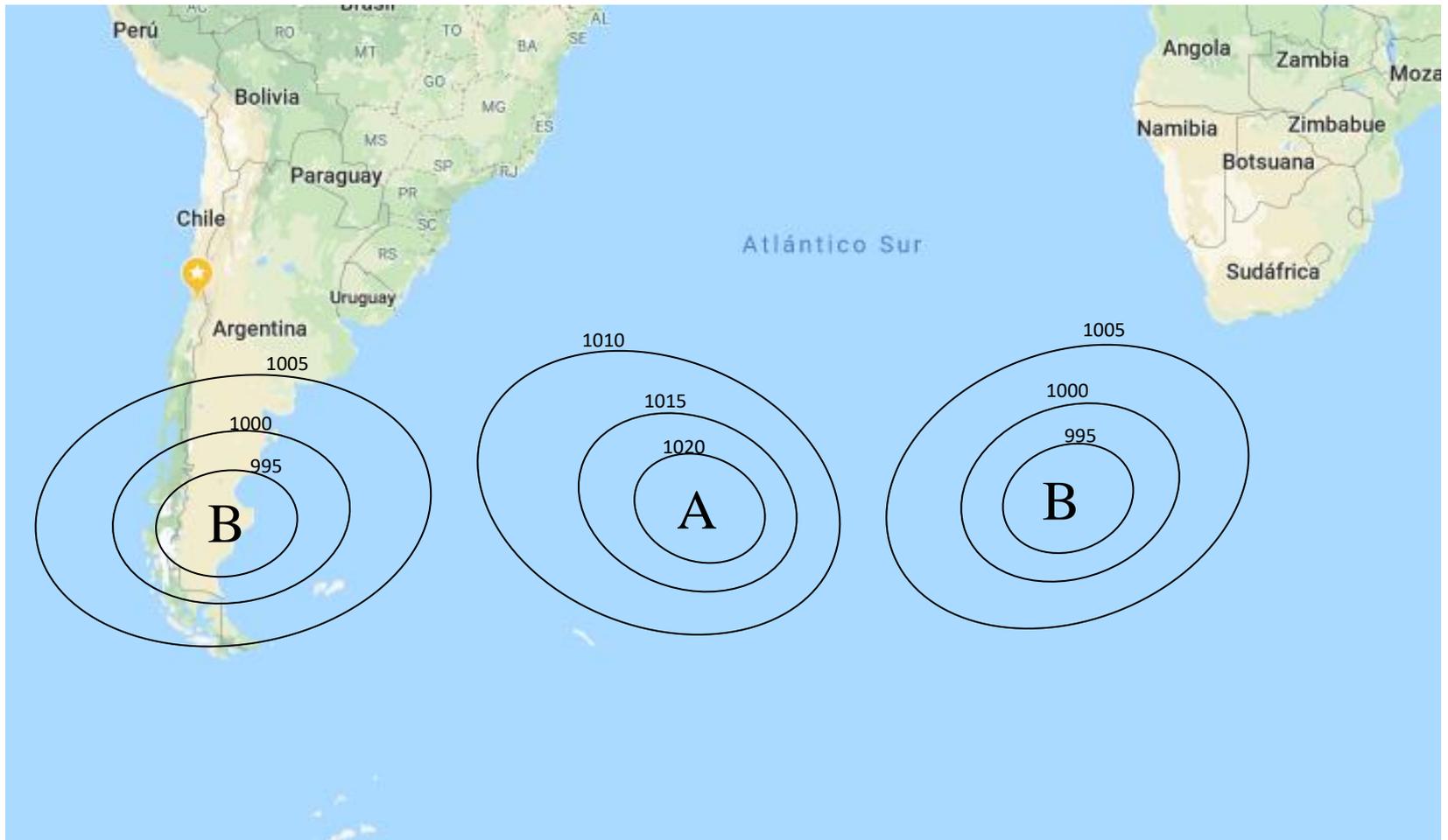
Viento geostrófico  
(por componentes)

$$u_{geos} = -\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial y} \quad v_{geos} = +\frac{1}{\rho f}\frac{\partial p}{\partial x}$$



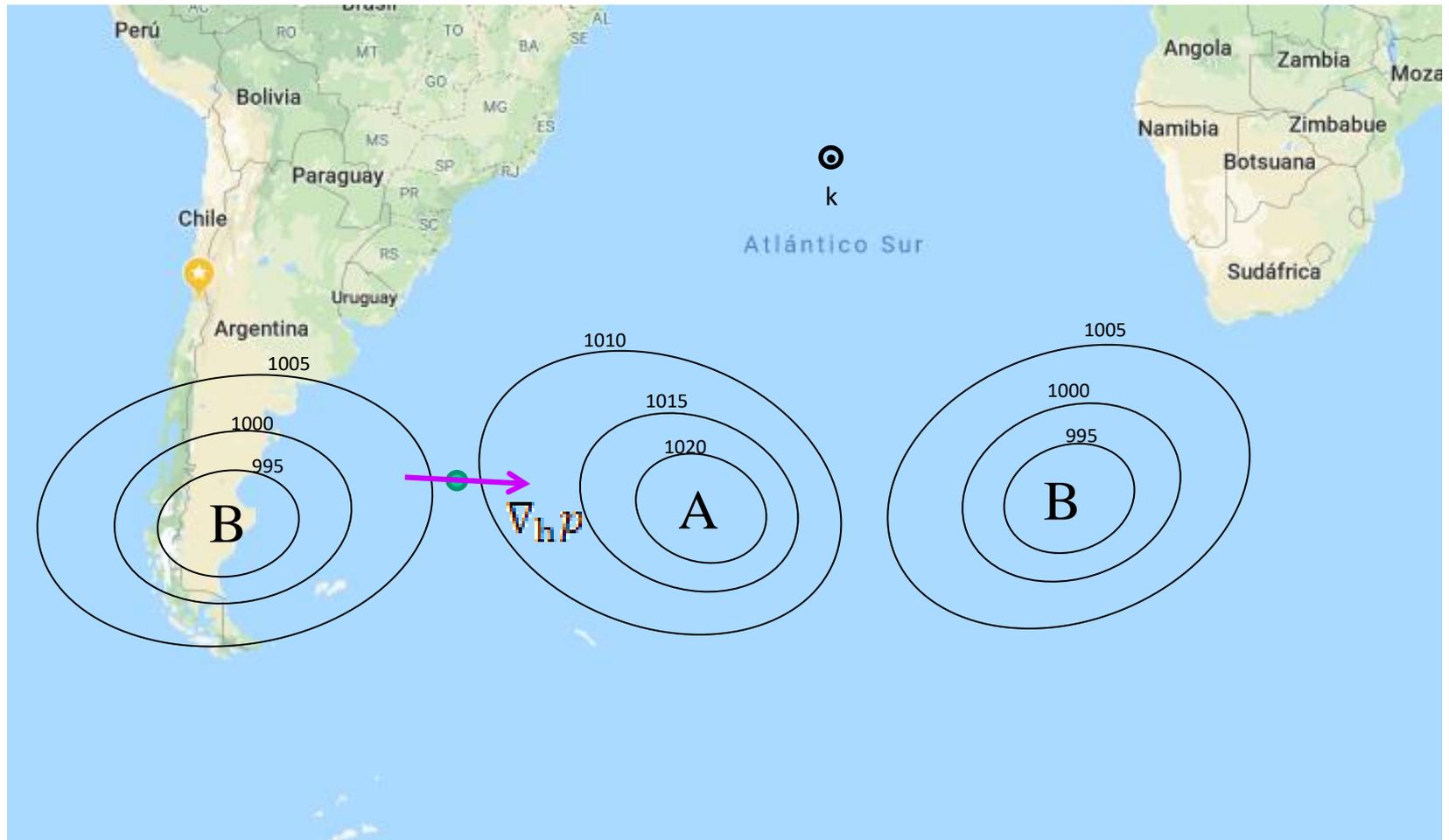
## ¿Como circula el aire en torno a los centros de alta y baja presión (HS)?

Consideremos un mapa con isobaras (líneas de igual presión) a nivel del mar construido en base a registros en barcos y boyas....Aquí se pueden apreciar los centros de alta (A) y baja (B) presión, cuyo origen discutiremos mas adelante

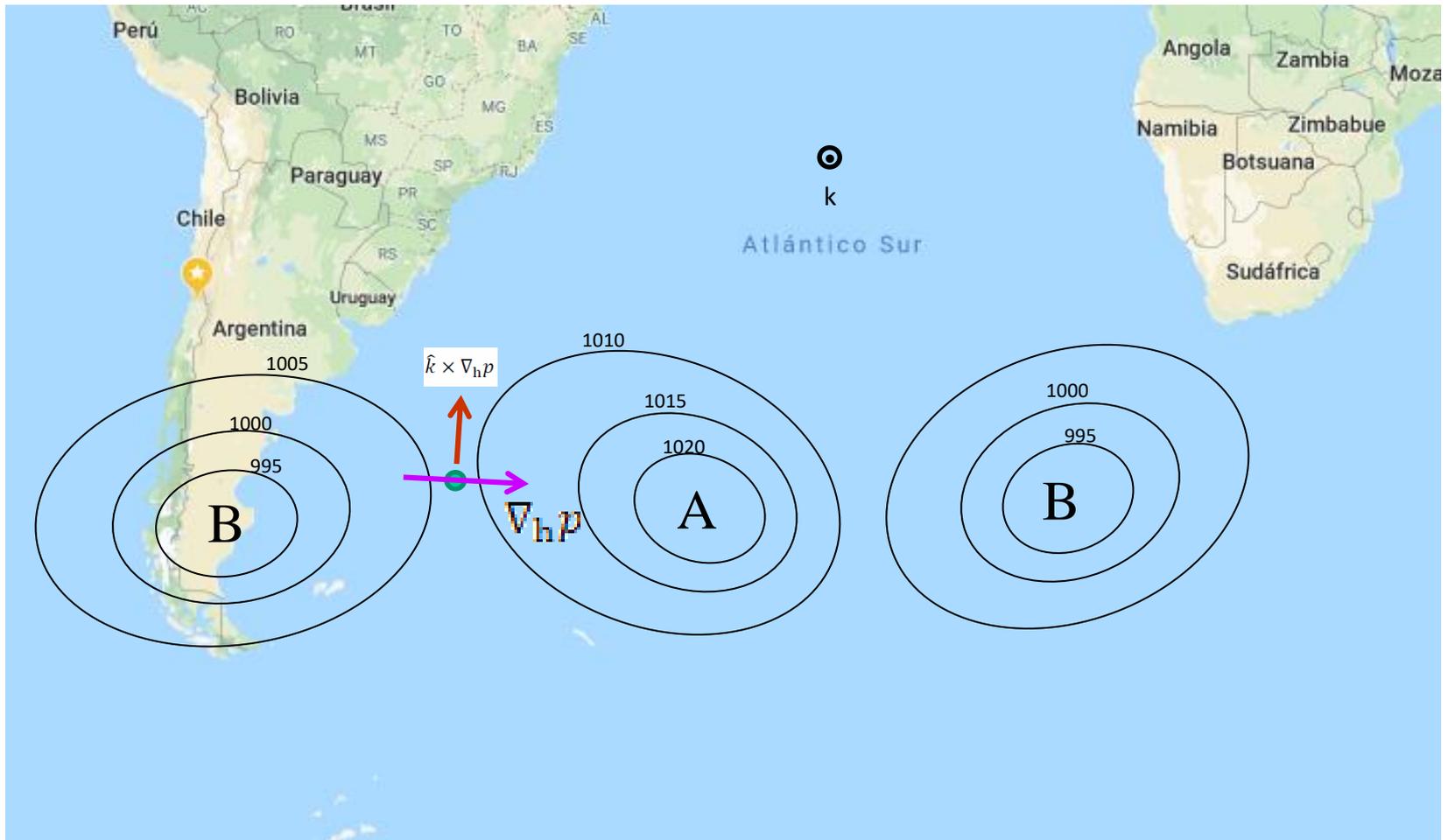


## ¿Como circula el aire en torno a los centros de alta y baja presión (HS)?

Fijemos nuestra atención en el punto color verde cerca de las islas Malvinas. Conociendo el campo de presión podemos visualizar **el vector gradiente de presión** apuntando hacia las altas presiones.

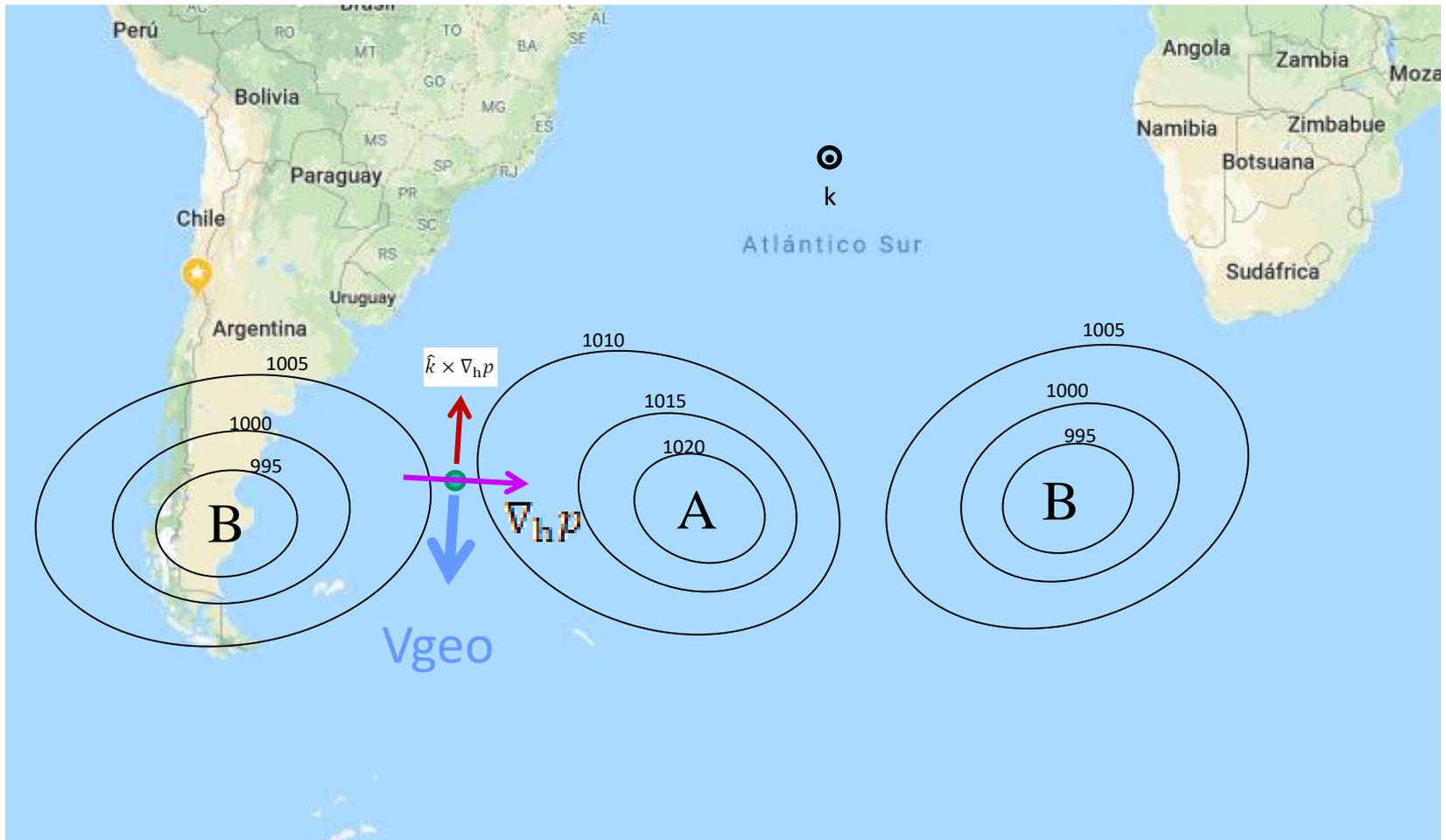


¿Como circula el aire en torno a los centros de alta y baja presión (HS)?  
Ahora hacemos el **producto cruz entre el vector gradiente de presión y el vector unitario  $\hat{k}$**  que apunta verticalmente hacia arriba.



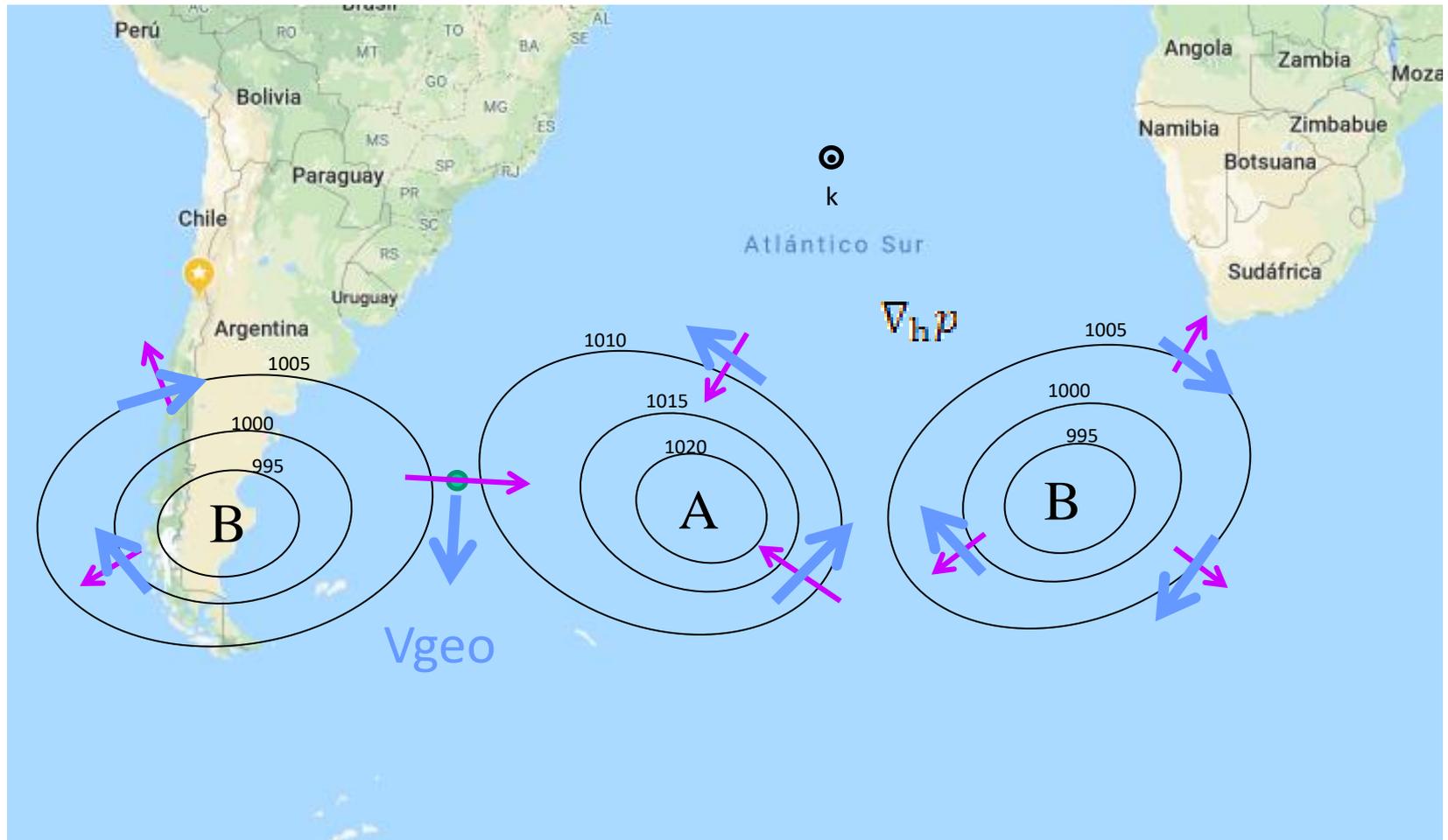
## ¿Como circula el aire en torno a los centros de alta y baja presión (HS)?

Finalmente escalamos el **producto cruz** anterior lo escalamos por  $1/(\rho f)$  para obtener el **viento geostrófico**. La densidad es siempre positiva pero el parámetro de Coriolis es negativo en el hemisferio sur, de forma que hay un cambio en el sentido....

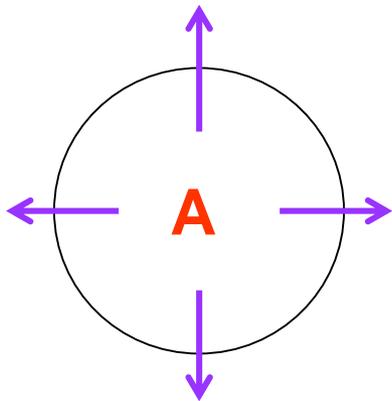


## ¿Como circula el aire en torno a los centros de alta y baja presión (HS)?

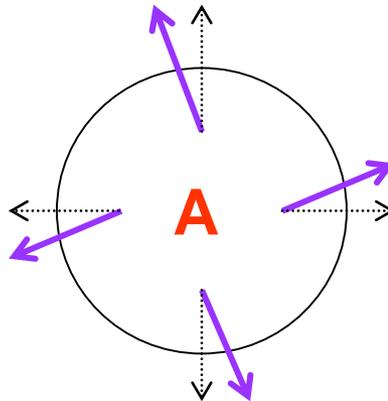
Podemos repetir este calculo en varios lugares...y comenzamos a ver el patrón general....el viento circula a favor de los punteros del reloj en torno a una baja (circulación ciclónica) y en contra de los punteros del reloj en torno a una alta (circulación anticiclónica)



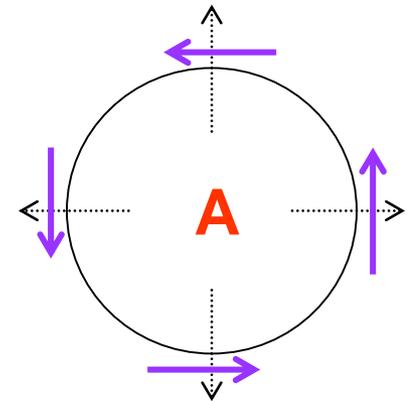
¿Como circula el aire en torno a los centros de alta y baja presión (HS)?



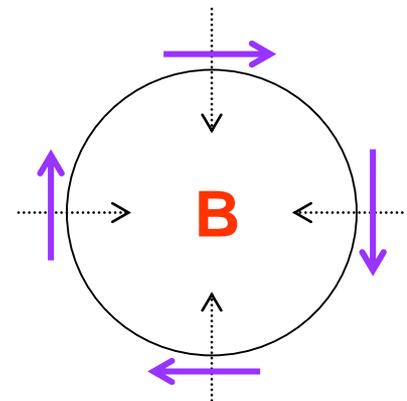
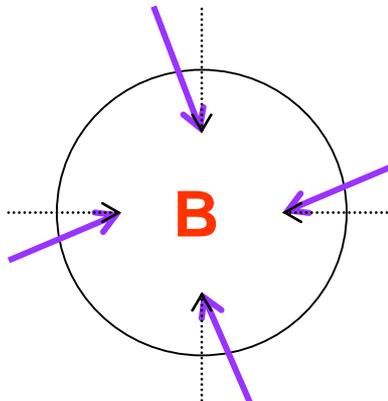
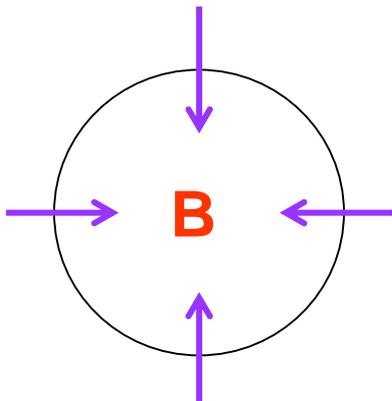
En el ecuador o en planeta sin rotación

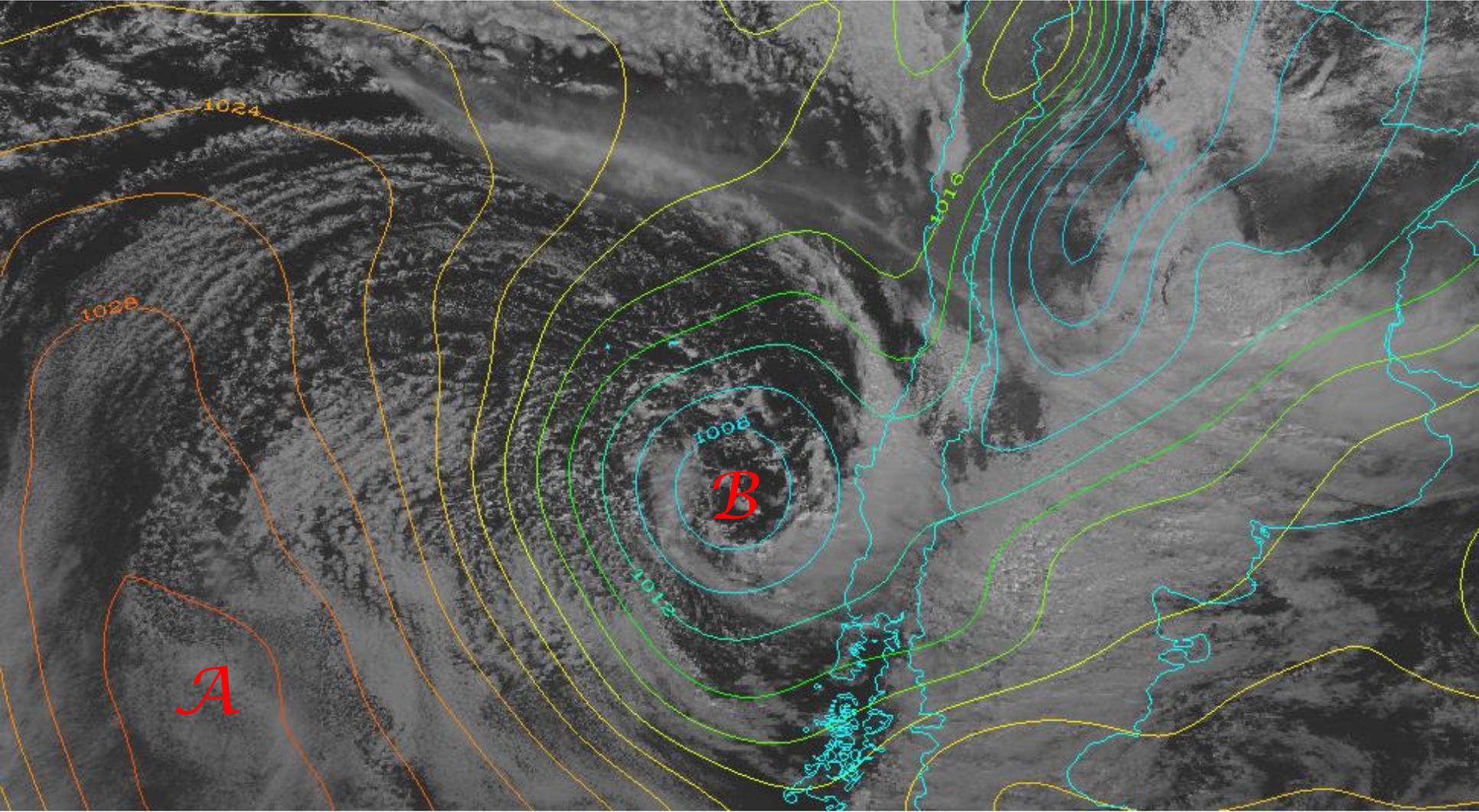


Muy cerca del ecuador o rotación planetaria muy lenta



Lejos del ecuador ( $>20^\circ$ ) para movimientos lentos



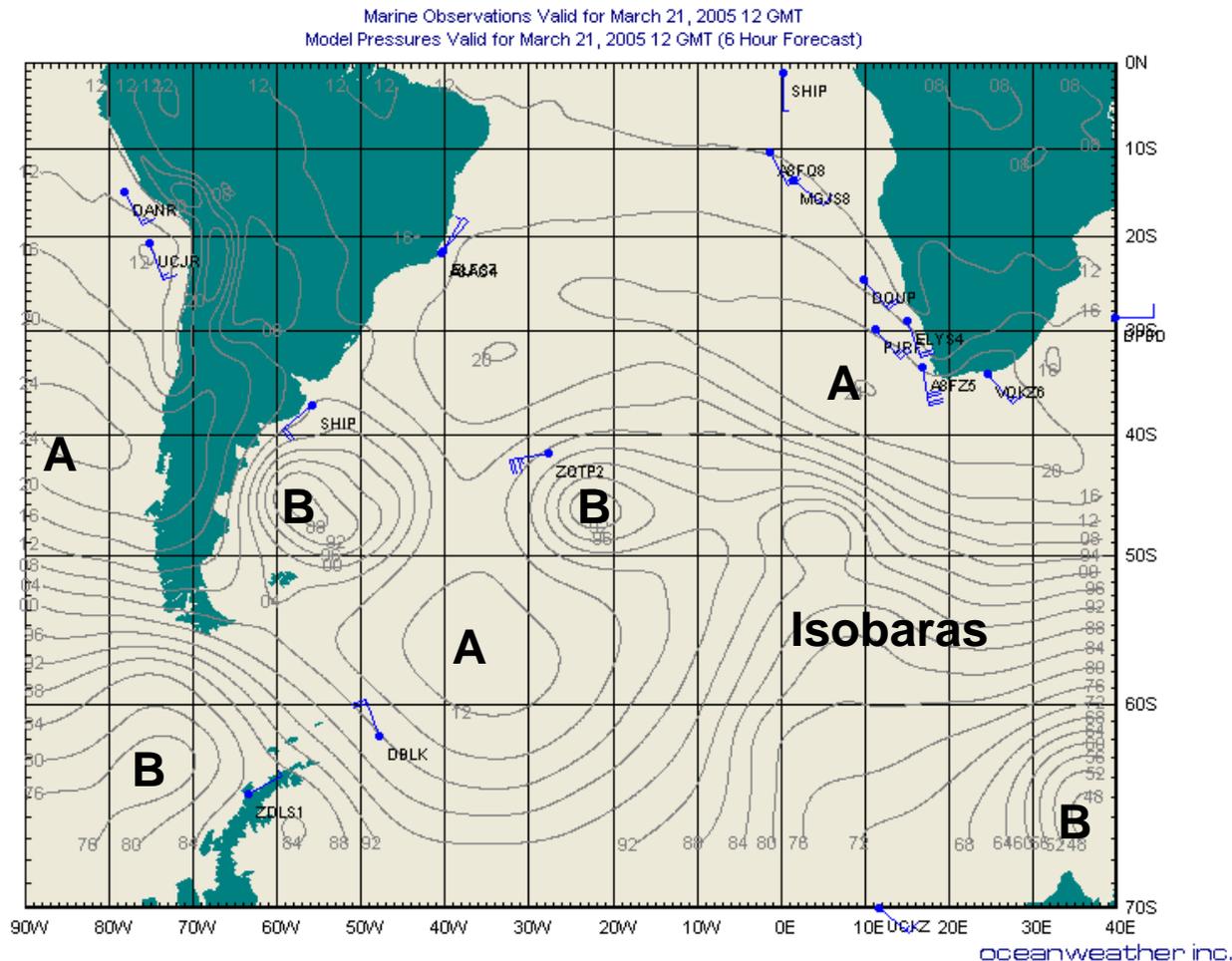




# Introducción a la Meteorología – Dinámica

## UCh/FCFM/DGF – R. Garreaud

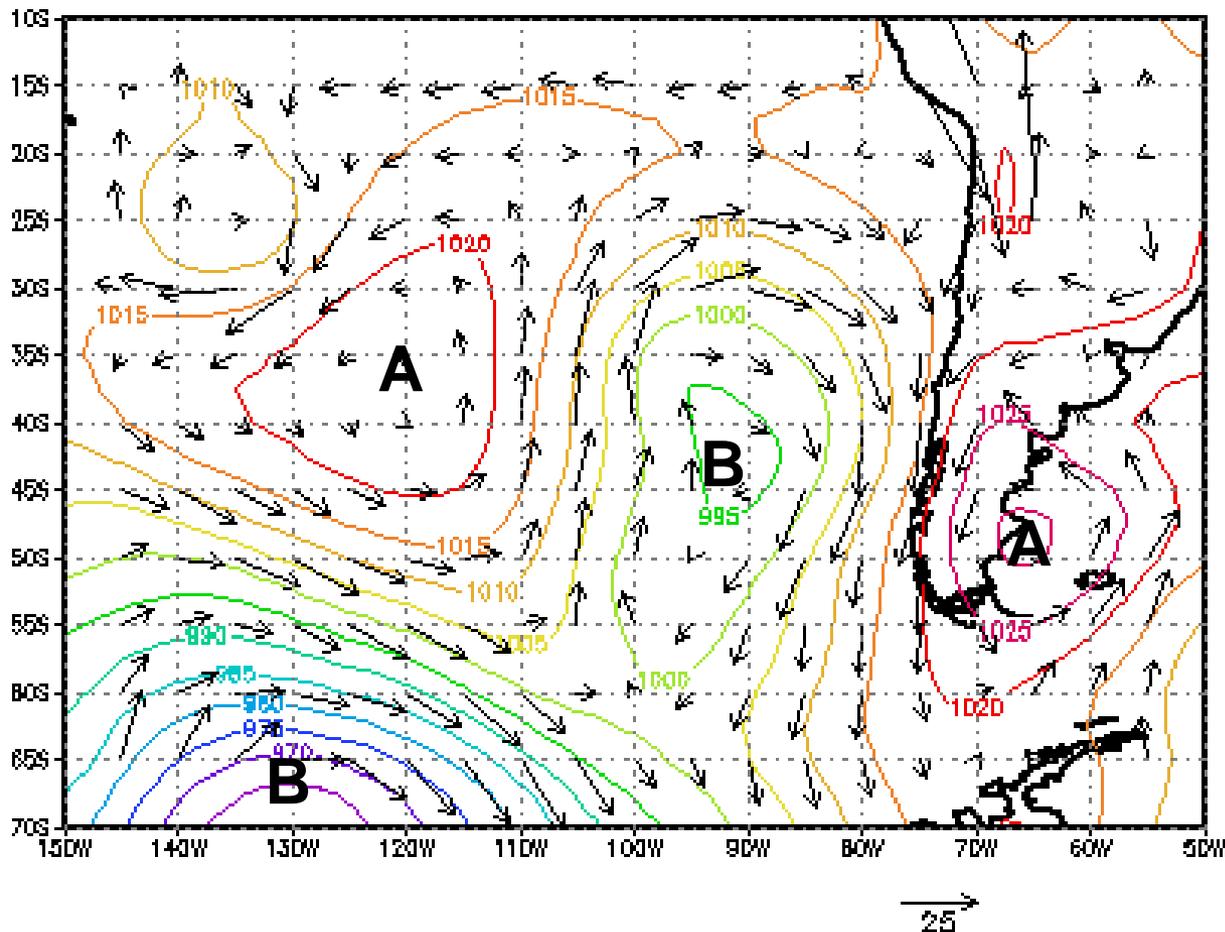
En este mapa se muestra algunas mediciones de viento y las isobaras de donde se puede deducir el viento geostrofico. Compare el viento real y el geostrofico....deberían andar muy bien.



# ¿Porque nos gustan tanto las cartas del tiempo?

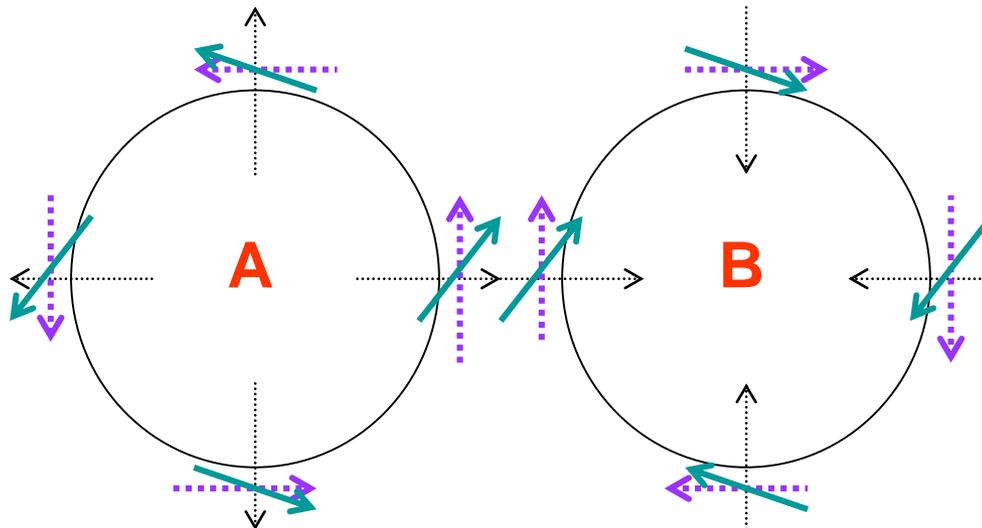
Otro ejemplo de cuan buena es la aproximación geostrofica

Contornos: líneas de igual presión  
Flechas: vector viento



## Efecto de la Fricción

Si queremos agregar mas realismo a nuestro balance de fuerzas que determinan el viento real, debemos considerar el efecto de la fricción que sufre el aire en contacto con el suelo (o cercano a el).



**Viento solo debido a gradiente de presión**

**Viento Geostrofico (equilibrio FGP y Fcoriolis)**

**Viento real (equilibrio FGP y Fcoriolis y Froce)**

## Viento geostrofico ...forma alternativa

La formula inicial del viento geostrofico tiene un problema practico...necesita conocer la densidad del aire ( $\rho$ )...variable siempre difícil de obtener

$$u_{geos} = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y} \quad v_{geos} = +\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Sin embargo, podemos usar el balance hidrostático  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$  junto a la ecuación de gases ideales para obtener una forma alternativa del viento geostrofico. Las componentes zonal y meridional resultan entonces:

$$u_{geos} = -\frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad v_{geos} = +\frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Donde se emplea el geopotencial  $\phi = gZ$

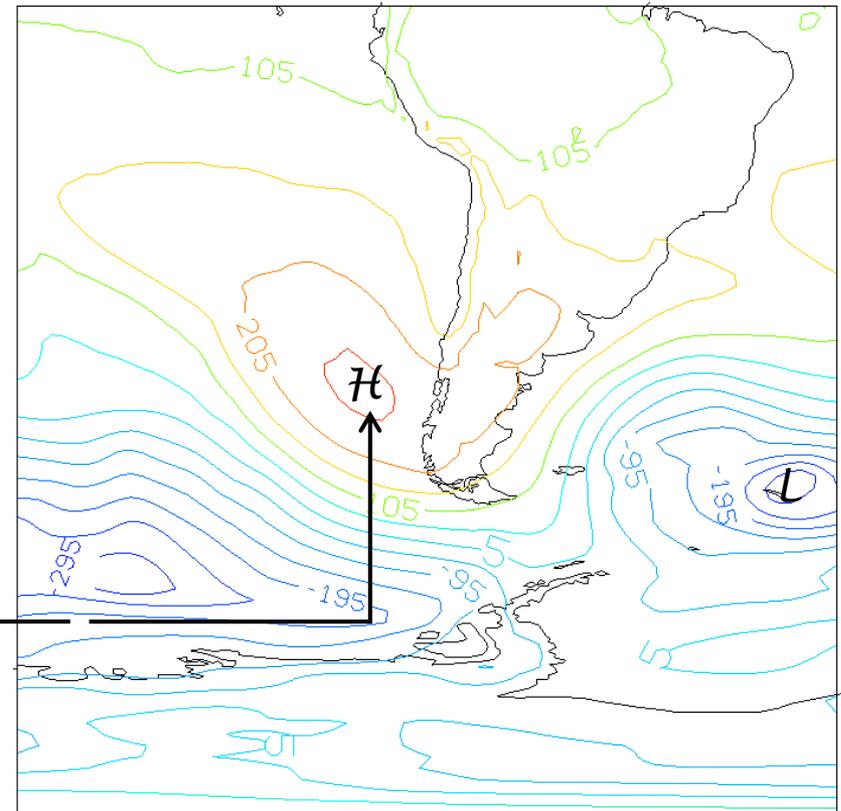
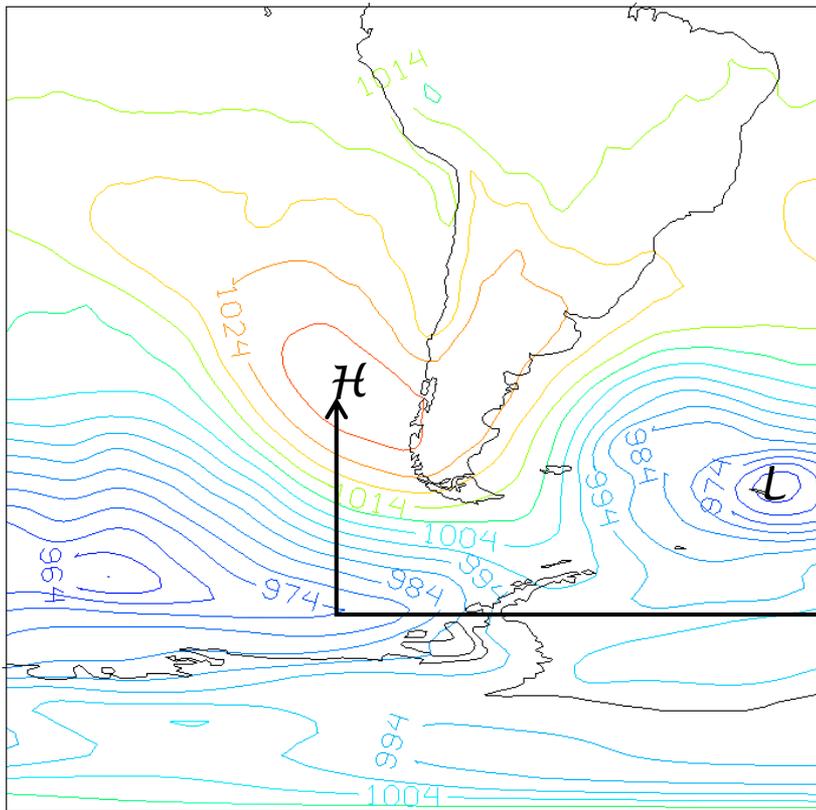
$$\vec{V}_{geos} = +\frac{1}{\rho f} \hat{k} \times \nabla_{hp} \quad \longrightarrow \quad \vec{V}_{geos} = +\frac{g}{f} \hat{k} \times \nabla_p Z$$

Notar que en este caso, la nueva variable vertical es el geopotencial, el cual se debe evaluar a un nivel constante de presión. Para esto, se mide con globos radiosondas lanzados en distintos puntos del planeta la altura (Z) a la cual alcanzan, por ejemplo, 500 hPa. Esta altura luego se multiplica por la aceleración de gravedad para obtener  $\phi$ .

Noten que el campo de presión a una altura fija (panel izquierda) es casi idéntico al campo de altura geopotencial a una presión fija (panel derecho). Así, el viento geostrofico es el mismo con cualquier formula que se evalué...

Presión @  $z = 0$  m (PNM)

Altura geopotencial @  $p = 1000$  hPa



## THE ROSSBY NUMBER

- Dividing the horizontal momentum equation, (6), through by  $fV$  we get

$$\frac{1}{fV} \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho fV} \nabla p - \hat{k} \times \frac{f\vec{V}}{fV}.$$

- Using the representative scales the order of magnitude of these terms are

$$\frac{U}{fL} = \frac{\delta P}{\rho fU} + 1.$$

- The dimensionless combination  $U/fL$  is defined as the *Rossby number* (named for Gustav Rossby),

$$Ro \equiv U/fL \quad (7)$$

### GEOSTROPHIC BALANCE (VERY SMALL ROSSBY NUMBER)

- When the Rossby number is much less than unity ( $Ro \ll 1$ ), then the acceleration (inertial) term can be ignored and the only two terms left are the pressure gradient term and the Coriolis term, which must be nearly in balance.
  - This is known as *geostrophic balance*, and the velocity in this case is known as the *geostrophic wind*.
  - The momentum equation in this case reduces to

$$\hat{k} \times f\vec{V}_g = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

which is solved for the geostrophic wind to yield

$$\vec{V}_g = \frac{1}{f\rho} \hat{k} \times \nabla p,$$

### CYCLOSTROPHIC BALANCE (VERY LARGE ROSSBY NUMBER)

- When the Rossby number is much greater than unity ( $Ro \gg 1$ ) then the Coriolis term can be ignored. In this instance the only terms that are left are the acceleration and the pressure gradient terms, and so the acceleration is a direct result of the pressure gradient force

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (10)$$

- This type of balance is called *cyclostrophic*.
- In cyclostrophic balance the pressure gradient acceleration is exactly that required for the centripetal acceleration, and so we have

$$\frac{V_c^2}{r} = \frac{|\nabla p|}{\rho}$$