CONTROL 1, ELECTRODINAMICA

Profesor R. Arias

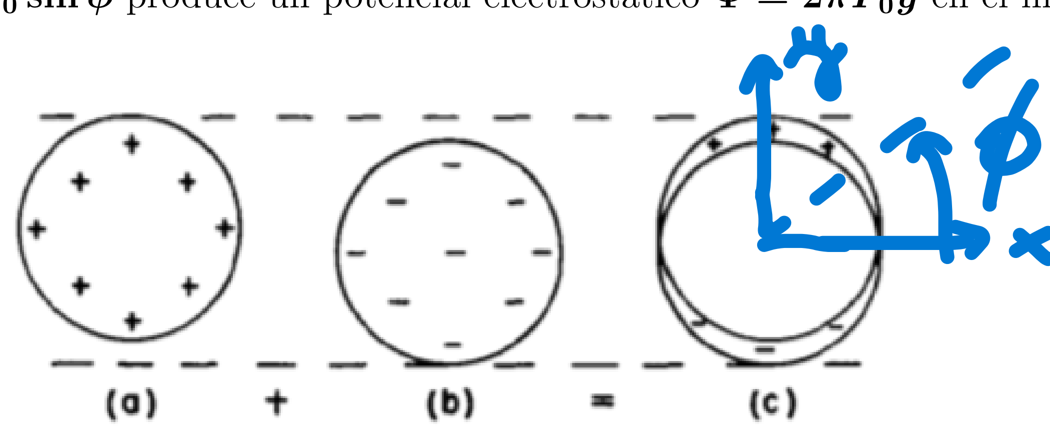
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile
Sábado 31 de Octubre, 2020, Duración 5 horas

- 1) (0.5) Esta pregunta está para que sirva de ayuda a la pregunta 2) (si no la puede probar, igual puede usar este resultado allí). La idea es mostrar una manera ingeniosa (sin tener que hacer cálculos complicados) de calcular el campo eléctrico al interior de un cilindro con polarización $\vec{P} = P_0\hat{y}$ constante: en ese caso la densidad de carga volumétrica $-\nabla\cdot\vec{P}$ es cero en el interior y la densidad de carga superficial es $\sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n} = P_0\sin\phi$, que es lo que interesa para el próximo problema.

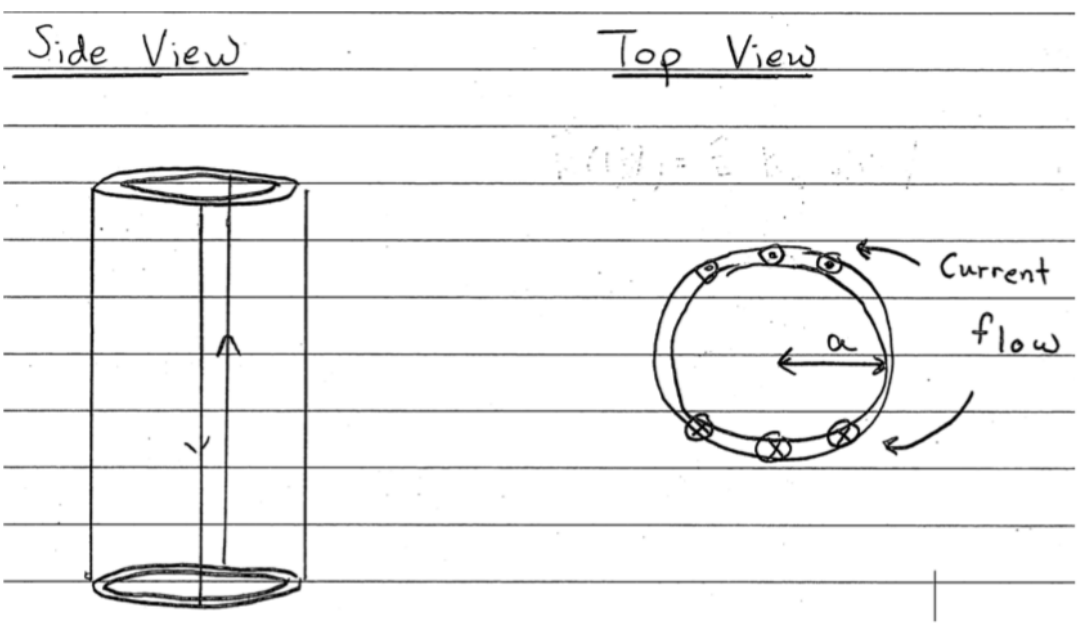
  Considere dos cilindros imaginarios de radio a, cargados con densidad volumétrica de carga $\pm\rho_0$, que inicialmente se superponen (de manera que tienen carga nula localmente) y luego se desplazan en $d\hat{y}$ entre sí ($d << a$): eso da lugar a una distribución de carga como en la figura (c) que se puede interpretar como una densidad superficial de carga para un cilindro (además la interpretación es que se ha dado lugar a una polarización efectiva constante dentro del cilindro, P_0).

  - a) (0.1) Demuestre que los campos eléctricos en el interior de ambos cilindros en sistemas de referencia con origen en sus centros de simetría son $\vec{E} = \pm 2\pi\rho_0\vec{r}$
  - b) (0.2) Haciendo una superposición adecuada de los campos anteriores (asociado a la figura (c)), demuestre que el campo eléctrico en el interior es $\vec{E} = -2\pi\rho_0 d\hat{y}$, y con ello que el potencial electrostático asociado es $\Phi = 2\pi\rho_0 dy$.
  - c) (0.2) Demuestre que las distribuciones de carga que aparecen en la figura (c) se pueden considerar equivalente a la siguiente distribución superficial de carga para un cilindro de radio a: $\sigma_P = \rho_0 d\sin\phi$. Es decir $P_0 = \rho_0 d$.

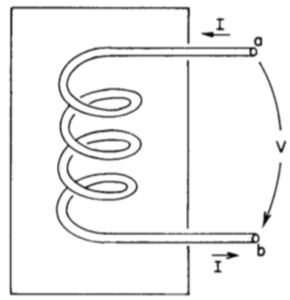
    Conclusión para pregunta 2): Un cascarón de densidad superficial de carga $\sigma_P = P_0\sin\phi$ produce un potencial electrostático $\Phi = 2\pi P_0 y$ en el interior.



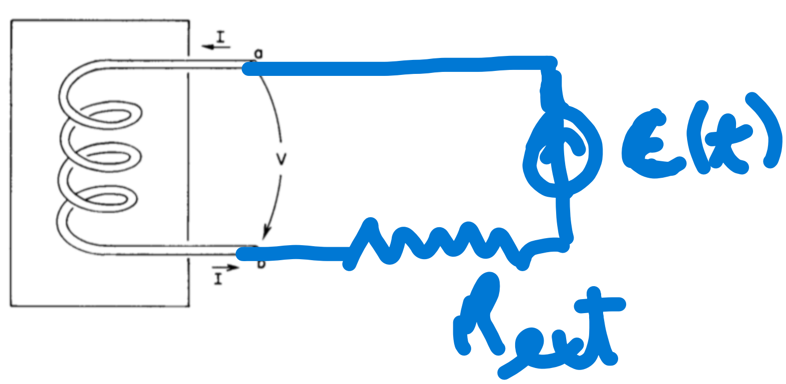
- 2) (1.5) **Decaimiento de una corriente superficial.** Un cascarón cilíndrico tiene radio $\boldsymbol{a}$, conductividad $\boldsymbol{\sigma}$ y grosor $\boldsymbol{\Delta << a}$. Dentro y fuera del cascarón hay espacio vacío. En el tiempo $\boldsymbol{t = 0}$ el cascarón lleva una corriente superficial $\vec{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{K_0} \sin \boldsymbol{\phi} \hat{\boldsymbol{z}}$, pero en ese momento la batería que producía esta corriente se corta (usted puede considerar que la corriente fluye uniformemente en la sección del cascarón, y que al ser $\boldsymbol{\Delta << a}$ se puede hablar de una densidad de corriente superficial $\vec{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\phi})$).
  - a) (0.5) Determine en la zona interior al cascarón, y usando el Gauge de Coulomb, el potencial vector $\vec{\boldsymbol{A}}$ y densidad de flujo magnético $\vec{\boldsymbol{B}}$ en $\boldsymbol{t = 0}$ (en una aproximación magnetostática).
  - b) (0.3) ¿Cúal es el campo eléctrico en el cascarón en $\boldsymbol{t = 0}$? (esta respuesta esencialmente casi no requiere cálculo)
  - c) (0.7) Determine $\vec{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\phi})$ en tiempos posteriores, usando una aproximación cuasi-estática. Ayuda: determine el campo eléctrico inducido en el cascarón debido a una corriente dependiente del tiempo de la forma $\vec{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\phi}) = \hat{\boldsymbol{z}} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{t}) \sin \boldsymbol{\phi}$.



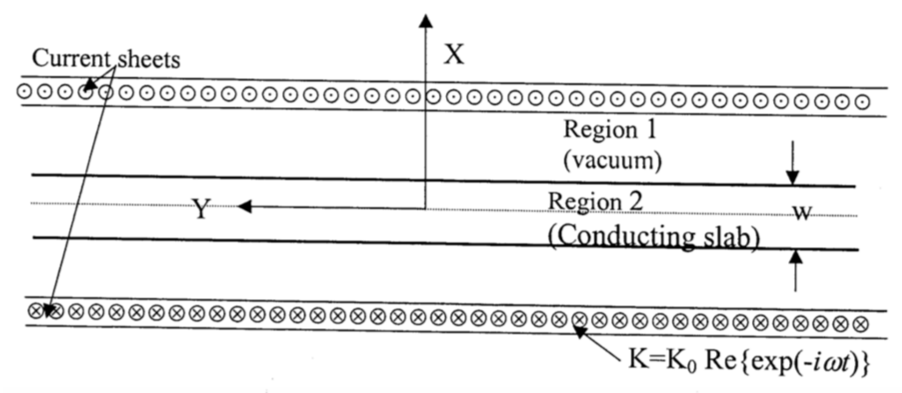
- 3) (2) Considere la bobina de la figura: circula por ella una corriente $\boldsymbol{I(t)}$ en el sentido mostrado, y $\boldsymbol{V(t)}$ es la diferencia de potencial entre los puntos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. La bobina tiene una auto-inductancia $\boldsymbol{L}$.



  - a) (0.5) Considere que la bobina está hecha de un alambre conductor perfecto. En ese caso, argumente utilizando adecuadamente una ecuación de Maxwell cuanto sería $\boldsymbol{V(t)}$ en términos de la corriente.
  - b) (0.5) La bobina de la figura vista desde la entrada superior correspondería a una espiral que va girando en contra de las manillas del reloj: haga un esquema de las líneas de $\vec{\boldsymbol{B}}$, con el sentido correspondiente. Imagine ahora que el dibujo cambia: es análogo al anterior salvo porque la espiral gira ahora a favor de las manillas del reloj: dibuje nuevamente las líneas de $\vec{\boldsymbol{B}}$ con su sentido, ¿se mantiene la relación entre $\boldsymbol{V(t)}$ y la corriente de la parte a)? (explique)
  - c) (0.5) Ahora imagine que el alambre entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no es perfecto, que tiene conductividad $\boldsymbol{\sigma}$ (suponga que entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ el largo total del alambre es $\boldsymbol{l}$, y que la corriente fluye uniforme en la sección de radio $\boldsymbol{d}$). Haciendo un análisis similar al de la parte a): ¿cuanto valdría $\boldsymbol{V(t)}$ en función de $\boldsymbol{I(t)}$?.
  - d) (0.5) Suponga que la situación en c) se completa entre $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{a}$ por el exterior con un generador de fuerza electromotriz asociada $\boldsymbol{\epsilon(t)}$ y una resistencia $\boldsymbol{R_{ext}}$, como se ve en la próxima figura. Haga un esquema de un circuito equivalente a este caso (indique en él donde están los puntos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$), y determine la ecuación diferencial que rige al circuito.



- 4) (2) Considere dos láminas delgadas de corriente, que fluyen hacia dentro y fuera del plano de la "hoja", como se indica en la figura (el modelo es que las láminas son infinitas y paralelas entre sí, de manera que los campos espacialmente solo dependen de la variable $\boldsymbol{x}$). Estas láminas tienen asociadas densidades superficiales de corriente $\vec{\boldsymbol{K}} = \pm \boldsymbol{K_0 \hat{z} Re}[\exp(-i\omega t)]$ (signo $+$ para la lámina superior y $-$ para la inferior). En todo el problema haga la suposición de que los campos son cuasi-estáticos (es decir desprecie la corriente de desplazamiento), por simetría puede suponer que las corrientes que se generen hacen que siempre $\vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{0}$ en la zona superior e inferior a las láminas.



  - a) (0.5) Primero considere que existe espacio vacío entre las láminas. Determine los campos $\vec{\boldsymbol{B}}$ y $\vec{\boldsymbol{E}}$ entre las láminas.
  - b) (1.5) Ahora considere que se coloca en forma paralela y simétricamente entre las láminas una placa conductora de ancho $\boldsymbol{w}$, conductividad $\boldsymbol{\sigma}$. Designe como $\vec{\boldsymbol{E}}_1, \vec{\boldsymbol{E}}_2, \vec{\boldsymbol{B}}_1, \vec{\boldsymbol{B}}_2$ a los campos eléctrico y magnéticos en las regiones 1 y 2 (que son exteriores e interior al conductor, como se indica en la figura, ambas entre las láminas de corriente). El objetivo ahora es determinar los campos $\vec{\boldsymbol{E}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ en las regiones 1 y 2 que se producen por las corrientes dependientes del tiempo que se dan en el sistema.
    * i) (0.5) Encuentre la solución para la ecuación que se deriva de las ecuaciones de Maxwell para el campo $\vec{\boldsymbol{B}}_2$ dentro del conductor. Su solución debiese contener dos constantes de integración. Eligiendo las soluciones asociadas con propiedades de simetría con respecto a $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, una de esas constantes debiese ser nula. Encuentre una expresión para $\vec{\boldsymbol{E}}_2$ usando $\vec{\boldsymbol{B}}_2$.
    * ii) (0.2) Una condición de borde para el campo $\vec{\boldsymbol{B}}$ en la superficie superior del conductor es que su componente tangencial sea continua: justifíquelo.
    * iii) (0.4) Encuentre $\vec{\boldsymbol{B}}_1$ (se puede basar en argumentos de simetría).
    * iv) (0.2) Encuentre $\vec{\boldsymbol{B}}_2$ y $\vec{\boldsymbol{E}}_2$.
    * v) (0.2) Encuentre $\vec{\boldsymbol{E}}_1$.