

Aux 5: 4 cosas

Repaso:

- Estamos usando la notación covariante donde usamos índices para señalar los componentes de los vectores: $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$
Con esta notación, expresar las transformaciones de Lorentz y el intervalo espacio-tiempo queda muy compacto

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad ; \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^\nu \quad ; \quad \Lambda^{\mu'}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Para una transf en } x)$$

- La forma en la cual transforma la posición es super conveniente y nos gustaría estudiar cantidades que transformaran de esta forma.
- Definimos la velocidad propia o 4-velocidad como

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(1, \vec{v}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Oso: hicimos } c=1, \\ \text{Sino } u^0 = \gamma c \end{array} \right.$$

Con τ tiempo propio definido como:

$$d\tau = \sqrt{-ds^2} = \frac{dt}{\gamma}$$

- La 4 velocidad transforma igual que la posición

$$\Rightarrow U^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} U^{\nu}$$

○ Sea que haya una transformación en x

$$U^{0'} = \gamma_{\beta} (U^0 - \beta U^1)$$

$$U^{1'} = \gamma_{\beta} (U^1 - \beta U^0)$$

Con esta relación podemos obtener la transformación de velocidades de Einstein, si:

$$U^0 = \gamma, \quad U^1 = \gamma V \quad ; \quad U^{0'} = \gamma', \quad U^{1'} = \gamma' V'$$

$$\Rightarrow \gamma' = \gamma_{\beta} (\gamma - \beta \gamma V)$$

$$\gamma' V' = \gamma_{\beta} (\gamma V - \beta \gamma)$$

Dividimos la segunda ecuación con la primera

$$\Rightarrow \frac{\gamma' V'}{\gamma'} = \frac{\cancel{\gamma_{\beta}} \gamma (V - \beta)}{\cancel{\gamma_{\beta}} \gamma (1 - \beta V)}$$

$$\Rightarrow \boxed{V' = \frac{V - \beta}{1 - \beta V}}$$

P1] Mov hiperbólico

Tenemos una partícula que se mueve siguiendo una trayectoria

$$x(t) = \sqrt{b^2 + (ct)^2}$$

a) Encontrar $\tau(t)$

• Usamos la relación entre el tiempo propio y el tiempo coordenado:

$$d\tau = dt/\gamma$$

• Para integrar necesitamos conocer $\gamma(t)$, calculamos $v = \frac{dx}{dt}$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{b^2 + (ct)^2}} \cdot 2(ct) \cdot c$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{c^2 t}{\sqrt{b^2 + (ct)^2}}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2 t^2}{(b^2 + (ct)^2)}}} = \frac{1}{b} \sqrt{b^2 + (ct)^2}$$

• Reemplazamos:

$$\tau = \int \frac{b dt}{\sqrt{b^2 + (ct)^2}} = \frac{b}{c} \ln (ct + \sqrt{b^2 + (ct)^2}) + Cte$$

- Si en $t=0$, $\tau=0 \Rightarrow cte = -\frac{b}{c} \ln(b)$

$$\Rightarrow \tau = \frac{b}{c} \ln\left(\frac{1}{b} (ct + \sqrt{b^2 + (ct)^2})\right)$$

b) Obtener $x(\tau)$ y $v(\tau)$

- Despejamos ct de la definición de $x(t)$

$$x = \sqrt{b^2 + (ct)^2} \Rightarrow (ct)^2 = x^2 - b^2$$

- Reemplazamos en $\tau(t)$

$$\Rightarrow \tau = \frac{b}{c} \ln\left(\frac{1}{b} (\sqrt{x^2 - b^2} + x)\right)$$

$$\Rightarrow b e^{\frac{c\tau}{b}} - x = \sqrt{x^2 - b^2} \quad |()^2$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} - 2b e^{\frac{c\tau}{b}} x + b^2 e^{\frac{2c\tau}{b}} = \cancel{x^2} - b^2$$

$$\Rightarrow 2b e^{\frac{c\tau}{b}} x = b^2 (1 + e^{\frac{2c\tau}{b}})$$

$$\Rightarrow x = \frac{b(1 + e^{\frac{2c\tau}{b}})}{2 e^{\frac{c\tau}{b}}} = b \left(\frac{e^{-\frac{c\tau}{b}} + e^{\frac{c\tau}{b}}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(\tau) = b \cosh\left(\frac{c\tau}{b}\right)}$$

- Para conocer la velocidad calculamos primero $\gamma(z)$

$$\gamma = \frac{1}{b} \sqrt{b^2 + (ct)^2} = \frac{x}{b} = \left[\cosh\left(\frac{cz}{b}\right) = \gamma(z) \right]$$

- Luego calculamos v usando la regla de la cadena:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dz}{dt} = c \sinh\left(\frac{cz}{b}\right) \cdot \frac{1}{\gamma} = c \sinh\left(\frac{cz}{b}\right) \cdot \frac{1}{\cosh\left(\frac{cz}{b}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = c \cdot \tanh\left(\frac{cz}{b}\right)}$$

- c) Calcular la velocidad propia:

- Por definición $u^\mu = \gamma(c, v)$

$$\Rightarrow u^\mu = \cosh\left(\frac{cz}{b}\right) \left(c, c \tanh\left(\frac{cz}{b}\right) \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{u^\mu = c \left(\cosh\left(\frac{cz}{b}\right), \sinh\left(\frac{cz}{b}\right) \right)}$$

- d) Calcular la aceleración propia $a^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau}$ y $a_\mu a^\mu$

- Derivamos directamente $u^\mu(z)$

$$\boxed{a^\mu = \frac{c^2}{b} \left(\sinh\left(\frac{cz}{b}\right), \cosh\left(\frac{cz}{b}\right) \right)}$$

• Luego calculamos su norma:

$$\begin{aligned} d_\mu d^\mu &= \eta_{\mu\nu} d^\nu d^\mu = \eta_{00} d^0 d^0 + \eta_{11} d^1 d^1 \\ &= -(d^0)^2 + (d^1)^2 \\ &= \left(\frac{c^2}{b}\right)^2 \left(-\sinh^2\left(\frac{cz}{b}\right) + \cosh^2\left(\frac{cz}{b}\right) \right) \\ &= \left(\frac{c^2}{b}\right)^2 \Rightarrow \boxed{d_\mu d^\mu = \left(\frac{c^2}{b}\right)^2} \end{aligned}$$

e) Mostrar que $U^\mu d_\mu = 0$

• Calculamos directamente:

$$\begin{aligned} U^\mu d_\mu &= -U^0 d^0 + U^1 d^1 \\ &= -\frac{c^3}{b} \left(\cancel{\sinh\left(\frac{cz}{b}\right)} \cosh\left(\frac{cz}{b}\right) - \cosh\left(\frac{cz}{b}\right) \cancel{\sinh\left(\frac{cz}{b}\right)} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$