

Aux 2 : Lo básico de relatividad especial

Repaso

• Principio de la relatividad:

"Las leyes físicas son invariantes en sistemas de referencias inerciales ($v = \text{cte}$)"

2 Observaciones:

-> Este principio exige la existencia de una velocidad máxima (la de la luz) sino se rompe la causalidad

-> El tiempo es promovido a una coordenada.

• Nuevos conceptos:

-> El análogo a la posición en el espacio 3-D será un evento ($ct, \vec{x}$) en el espacio-tiempo (4-D).

-> Un intervalo en el espacio-tiempo será la "distancia" en 4D

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta \vec{x}^2$$

! Debido al signo (-) Δs
! puede ser negativo

Se clasifican:

$$\Delta s^2 < 0$$

"tiempo"

$$\Delta s^2 = 0$$

"luz" o "nulo"

$$\Delta s^2 > 0$$

"espacio"

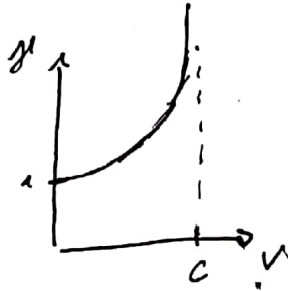
Transformaciones de Lorentz (1-D)

- Tenemos dos sistemas de referencia O, O' con velocidad relativa $v = v\hat{x}$ entre ellas. Las reglas de transformación entre estos sistemas serán:

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right), \quad \Delta x = \gamma (\Delta x' + v \Delta t'), \quad \Delta y = \Delta y', \quad \Delta z = \Delta z'$$

Donde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



P1]

a) ¿A qué velocidad se debe mover un obs. $\swarrow S'$ para que mida la mitad del tiempo respecto a uno en reposo? $\nwarrow S$.

• Transformamos el tiempo (suponemos que S y S' coinciden inicialmente)

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right)$$

$\nwarrow$ tiempo que mide S $\nwarrow$ tpo medido en S' $\nwarrow$ Posición del obs en S' ($x'=0$)

$\Rightarrow \boxed{t = \gamma t'}$ Dilatación del tiempo (recordar $\gamma > 1$)

$$\Rightarrow \frac{t}{t'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{t'}{t}\right)^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{imponemos} \\ t' = t/2 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \boxed{v = 0,866 c}$

b) Tenemos un sistema de referencia Sol-Tierra (S) y dos eventos: A: en $t=0$ ubicado en la tierra
B: en $t=2\text{min}$ " en el Sol

Además tenemos una nave que se mueve de la tierra al Sol con velocidad $u = +0,8 c$ (S')

i) Encontrar la dif de tiempo entre A y B para la nave

- Usaremos la transformación de Lorentz inversa (de S a S')

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{u}{c^2} \Delta x \right)$$

$\Delta t'$: tpo que mide la nave
 Δt : tiempo entre A y B para S $\Delta t_{AB} = 2 \text{ min}$
 Δx : Distancia espacial entre los eventos A y B para S: $\Delta x_{AB} = 8.3 \text{ min luz}$

- Reemplazamos

$$\Delta t' = \gamma \left(2 \text{ min} - \frac{0.8c \cdot 8.3 \text{ min} \cdot c}{c^2} \right)$$

$$= \frac{(2 - 0.8 \cdot 8.3) \text{ min}}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} \approx -7.7 \text{ min}$$

Para la nave el evento B ocurre antes que A.

- Si la nave fue en sentido opuesto $\Rightarrow u = -0.8c$

$$\Delta t' = \gamma \cdot \left(2 \text{ min} + \frac{0.8c \cdot 8.3 \text{ min} \cdot c}{c^2} \right)$$

$$\approx 14 \text{ min.}$$

ii) ¿A qué velocidad se debe mover la nave para que el viaje Sol-Tierra dure 5 min?

- Usamos la transf de x.

$$\Delta x = \gamma (\Delta x' + v \Delta t')$$

Δx : Distancia que recorre la nave en S $\Rightarrow$ dist tierra-sol
 $\Delta x'$: Lo que se mueve la nave en S' ($\Delta x' = 0$)
 $\Delta t'$: Tiempo de viaje que mide la nave $\Rightarrow \Delta t' = 5 \text{ min}$

• Nos queda:

$$\Delta x = \gamma v \Delta t'$$

Oso con que $\gamma(v)$

$$\gamma \cdot v = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v}{\frac{v}{c} \sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1}} = \frac{c}{\sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t'} = \frac{c}{\sqrt{\frac{c^2}{v^2} - 1}}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{c} = \left(1 + \left(\frac{c \Delta t'}{\Delta x} \right)^2 \right)^{-1/2}$$

Usamos

$$\frac{c \Delta t'}{\Delta x} = \frac{6.5 \text{ min}}{8.3 \text{ min} \cdot c}$$

$$\Rightarrow \boxed{v \approx 0.856 c}$$

$$= 5/8.3$$

iii) ¿Cuánto dura el viaje en el sist S?

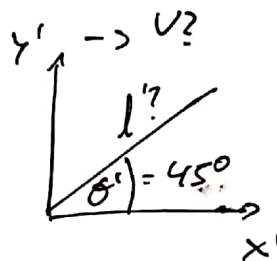
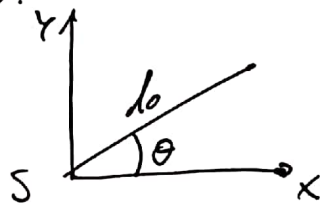
• Tenemos la velocidad de la nave, usamos cinemática:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{8.3 \text{ min} \cdot c}{0.856 c} \approx 9.7 \text{ min} //$$

P₂] Tenemos una vara con longitud propia l_0 en reposo ~~en~~ a un sist S . La vara forma un ángulo dado por $\theta = \tan^{-1}(3/4)$ respecto al eje x . Hay un sist. S' que se mueve con vel $\vec{v} = v\hat{x}$ c/r a S , en S' la vara forma un ángulo de 45° respecto a x'

i) ¿Cuánto vale v ?

• Un dibujo:



• En S' la tangente del ángulo deberá cumplir

$$\tan(\theta') = \frac{y'}{x'}$$

Pero: $y = y'$

$$x = \gamma(x' - vt')$$

$$= \frac{y'}{\gamma x'} = \gamma \tan(\theta)$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\tan(\theta')}{\tan(\theta)} \quad \left| \begin{array}{l} \tan(\theta') = 1 \\ \tan(\theta) = 3/4 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{v = \frac{\sqrt{7}}{4} c}$$

ii) ¿cuánto vale l' ?

• Usamos la definición de dist en 3-D

$$l'^2 = y'^2 + x'^2 = y^2 + \frac{x^2}{\gamma^2} \quad \left| \quad \gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right|$$

$$\Rightarrow l'^2 = y^2 + x^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$= \underbrace{y^2 + x^2}_{l_0^2} - x^2 \frac{v^2}{c^2} \quad \left| \quad x = l_0 \cos \theta \right|$$

$$\Rightarrow l'^2 = l_0^2 \left(1 - \cos^2 \theta \frac{v^2}{c^2}\right) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Usamos la identidad} \\ \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \end{array} \right|$$

$$= l_0^2 \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{9}{16}\right)} \cdot \frac{3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{l' = l_0 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{5}}$$