

Aux 1: Rotaciones

P1] Calcular directamente una transformación R que cumpla $R^T R = I$

- Recordemos que en el lenguaje que estamos usando, si tenemos un vector $\vec{x}$ una transformación lineal o un cambio de coordenadas estará caracterizada por una matriz R tal que $\vec{x}' = R\vec{x}$
- Vamos a calcular directamente lo que se nos pide, trabajaremos en 2 dimensiones en toda la auxiliar. Definimos R

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow R^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

→ Calculamos $R^T R$

$$\Rightarrow R^T R = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ba + dc & b^2 + d^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Tendremos 3 ecuaciones independientes.

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + c^2 = 1 \\ ab = -cd \\ b^2 + d^2 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Como tenemos 3 ecuaciones} \\ \text{y 4 incógnitas, tendremos} \\ \text{una variable libre.} \end{array}$$

→ De (II): $c = -\frac{ab}{d}$, reemplazamos en (I)

$$\Rightarrow a^2 + \frac{a^2 b^2}{d^2} \stackrel{\text{(III)}}{=} a^2 \left(1 + \frac{(1-d^2)}{d^2} \right) \cdot 1 \Rightarrow \boxed{a^2 = d^2}$$

→ Si hacemos $(u)^2$ y reemplazamos lo anterior

$$\Rightarrow a^2 b^2 = c^2 d^2 = c^2 a^2 \Rightarrow \boxed{b^2 = c^2}$$

→ Usamos a como variable libre y la redefinimos como

$$\boxed{a = \cos \theta \Rightarrow c = \sin \theta}$$

• Gracias a la ecuación (u) tendremos dos posibles soluciones

$$\text{I) } \underline{b = -c \text{ y } a = d} \Rightarrow R_I = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{II) } \underline{b = c \text{ y } a = -d} \Rightarrow R_{II} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

• ¿Qué diferencia I y II? Veamos el determinante:

$$\rightarrow \det(R_I) = 1, \quad \rightarrow \det(R_{II}) = -1$$

→ R_I será una rotación propia y R_{II} será una rotación impropia.

(Se definen rotaciones ya que cumplen $R^T R = I$)

• Finalmente notemos que una rotación impropia se puede escribir como la multiplicación entre una rotación propia y una inversión

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R_I \cdot P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = R_{II}.$$

P2] Encontrar la transformación que deje invariante la matriz

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Usaremos la notación tensorial, donde, por ejemplo, los componentes de η_{ij} serán:

$$\eta_{11} = -1, \eta_{22} = 1, \eta_{12} = \eta_{21} = 0$$

- Con esta notación las matrices de transformación las escribimos como $L^i_{j'}$ y para transformar vectores usamos la regla de Einstein

$$\vec{X}' = X_{j'} = L^i_{j'} X_i = L^1_{j'} X_1 + L^2_{j'} X_2$$

- Las matrices (o tensores con 2 índices) transforman como vector para cada índice.

$$M'^i = M_{i'j'} = L^i_{i'} L^{j'}_{j} M_{ij}$$

- Ahora si, transformamos η_{ij}

$$\eta'_{i'j'} = L^i_{i'} L^{j'}_{j} \eta_{ij} = L^i_{i'} (L^1_{j'} \eta_{i1} + L^2_{j'} \eta_{i2})$$

$$= L^1_{i'} (L^1_{j'} \cancel{\eta_{11}}^{i1} + L^2_{j'} \cancel{\eta_{12}}^{i2}) + L^2_{i'} (L^1_{j'} \cancel{\eta_{21}}^{i1} + L^2_{j'} \cancel{\eta_{22}}^{i2})$$

$$= -L^1_{i'} L^1_{j'} + L^2_{i'} L^2_{j'}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Como} \\ \eta_{11} = -1 \\ \eta_{22} = 1 \\ \eta_{12} = \eta_{21} = 0 \end{array} \right\}$$

- Imponemos la condición del problema $\eta' = \eta$ o sea

$$\eta'_{1'1'} = -1, \eta'_{2'2'} = 1, \eta'_{1'2'} = \eta'_{2'1'} = 0$$

- Tendremos 3 ecuaciones

$$\eta_{1'1'} = -1 = -L_{1'}^1 L_{1'}^1 + L_{1'}^2 L_{1'}^2$$

$$\eta_{2'2'} = 1 = -L_{2'}^1 L_{2'}^1 + L_{2'}^2 L_{2'}^2$$

$$\eta_{1'2'} = 0 = -L_{1'}^1 L_{2'}^1 + L_{1'}^2 L_{2'}^2$$

- Escribimos de forma más sencilla la matriz $L^{i'}_j$

$$L^{i'}_j = \begin{pmatrix} L_{1'}^1 & L_{2'}^1 \\ L_{1'}^2 & L_{2'}^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- Las ecuaciones serían:

$$\left. \begin{aligned} a^2 - c^2 &= 1 \\ ab &= cd \\ d^2 - b^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{De forma análoga} \\ &a^2 = d^2 \\ &c^2 = b^2 \end{aligned}$$

- Gracias a la segunda ecuación sabemos que las soluciones estarán dadas por a y b tienen el mismo signo o signos opuestos

- Redefinimos $a = \cosh \phi \Rightarrow c = \sinh \phi$, la transformación será

$$L^{i'}_j = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix}_{11}$$

P3] Mostrar que bajo una rotación propia $R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$,

$\Delta x \hat{x} + \Delta y \hat{y}$ se mantiene invariante.

- Los vectores unitarios transforman igual que las diferencias, o sea que si:

$$\Delta \vec{x}' = R \Delta \vec{x} \Rightarrow \begin{aligned} \Delta x' &= \cos \theta \Delta x + \sin \theta \Delta y \\ \Delta y' &= -\sin \theta \Delta x + \cos \theta \Delta y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{x}' = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}$$

$$\hat{y}' = -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}$$

- Calculamos directamente $\Delta x' \hat{x}' + \Delta y' \hat{y}'$

$$\begin{aligned} \Delta x' \hat{x}' + \Delta y' \hat{y}' &= (\cos \theta \Delta x + \sin \theta \Delta y) (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) \\ &\quad + (-\sin \theta \Delta x + \cos \theta \Delta y) (-\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}) \end{aligned}$$

$$= \cos^2 \theta \Delta x \hat{x} + \cancel{\cos \theta \sin \theta \Delta x \hat{y}} + \cancel{\cos \theta \sin \theta \Delta y \hat{x}} + \sin^2 \theta \Delta y \hat{y}$$

$$+ \sin^2 \theta \Delta x \hat{x} - \cancel{\sin \theta \cos \theta \Delta x \hat{y}} - \cancel{\cos \theta \sin \theta \Delta y \hat{x}} + \cos^2 \theta \Delta y \hat{y}$$

$$= \Delta x (\cancel{\cos^2 \theta} + \sin^2 \theta) \hat{x} + \Delta y (\cancel{\cos^2 \theta} + \sin^2 \theta) \hat{y}$$

$$= \Delta x \hat{x} + \Delta y \hat{y} //$$