**FI3101-1** Mecánica Clásica.
**Profesor:** Marcel Clerc.
**Auxiliares:** Roberto Gajardo, David Pinto.

# Auxiliar 10: Routhiano y pequeñas oscilaciones.

01 de Diciembre del 2020

**P1.** **Routhiano del péndulo en éter:**

a) Tal como se vio en clases, si tenemos un lagrangiano con $n$ coordenadas generalizadas, donde la coordenada $q_n$ es cíclica, entonces el routhiano $R$ está definido por:

$$R = P_n\dot{q}_n - L(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \quad ; \quad P_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}$$

Donde debemos reemplazar $\dot{q}_n(P_n)$ para dejar el routhiano $R = R(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}; P_n)$ completamente definido en función de las coordenadas no cíclicas y del (ahora) parámetro del problema $P_n$. En este caso en particular se tienen las coordenadas generalizadas $\theta$ y $\phi$, de donde $\phi$ es cíclica, ya que no aparece explícitamente en el lagrangiano. Buscamos $P_\phi$ y a partir de él encontramos $\dot{\phi}(P_\phi)$:

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \;\Rightarrow\; P_\phi = ml^2\dot{\phi}\sin^2(\theta) \;\Rightarrow\; \dot{\phi} = \frac{P_\phi}{ml^2\sin^2(\theta)}$$

Aplicamos la definición de routhiano y entonces:

$$R = P_\phi\dot{\phi} - L(\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \;\Rightarrow\; R = ml^2\dot{\phi}^2\sin^2(\theta) - \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2(\theta)\right) - mgl\cos(\theta) - F\theta - \mu\dot{\theta}t$$

$$\Rightarrow\; R = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2\sin^2(\theta) - \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta} - mgl\cos(\theta) - F\theta - \mu\dot{\theta}t$$

Reemplazando $\dot{\phi}(P_\phi)$ y desarrollando:

$$\Rightarrow \boxed{R(\theta, \dot{\theta}; P_\phi) = \frac{P_\phi^2}{2ml^2\sin^2(\theta)} - \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta} - mgl\cos(\theta) - F\theta - \mu\dot{\theta}t}$$

Ahora, tal como se vio en clases, para las coordenadas no cíclicas del lagrangiano se siguen cumpliendo las ecuaciones de Euler-Lagrange usando el routhiano en vez del lagrangiano, es decir, para la coordenada i-ésima:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n-1$$

Entonces aplicamos esta ecuación en la coordenada $\theta$:

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = -\frac{P_\phi^2\cos(\theta)}{ml^2\sin^2(\theta)} + mgl\sin(\theta) - F \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = -ml^2\dot{\theta} - \mu t \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}}\right) = -ml^2\ddot{\theta} - \mu$$

Reemplazando y reordenando:

$$\Rightarrow\ -ml^2\ddot{\theta} - \mu + \frac{P_\phi^2\cos(\theta)}{ml^2\sin^2(\theta)} - mgl\sin(\theta) + F = 0$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) - \frac{P_\phi^2\cos(\theta)}{m^2l^4\sin^2(\theta)} + \frac{\mu - F}{ml^2} = 0}$$

b) Por definición, el hamiltoniano del sistema puede calcularse a partir del lagrangiano como:

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$$

En este caso en particular, con las coordenadas $\theta$ y $\phi$ se tiene que:

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\dot{\phi} - L \ \Rightarrow\ H = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} + P_\phi\dot{\phi} - L$$

Notamos de la expresión anterior que los últimos dos términos son la definición de routhiano del sistema, entonces:

$$\Rightarrow\ H = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} + R$$

Todavía nos falta desarrollar esta expresión, y es que el lagrangiano $L$ aún está presente. Lo que podemos hacer es derivar con respecto a $\dot{\theta}$ la definición de routhiano:

$$R(\theta, \dot{\theta}; P_\phi) = P_\phi\dot{\phi} - L(\theta, \dot{\theta}; P_\phi) \ \Rightarrow\ \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$$

Entonces, reemplazando en la expresión para $H$ obtenemos el hamiltoniano a partir del routhiano del sistema:

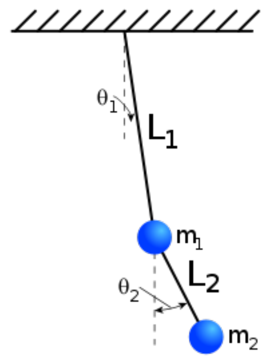
$$\Rightarrow\ \boxed{H = R - \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta}}$$

Reemplazando y desarrollando se obtiene el hamiltoniano en forma explícita:

$$\Rightarrow\ \boxed{H(\theta, \dot{\theta}; P_\phi) = \frac{P_\phi^2}{2ml^2\sin^2(\theta)} + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta} - mgl\cos(\theta) - F\theta}$$

**P2. Péndulo doble en pequeñas oscilaciones:**

Considere un péndulo doble como el que se muestra en la siguiente figura:




a) Para encontrar el lagrangiano necesitamos la energía cinética $T$ y la energía potencial $V$. La energía cinética de una partícula con masa $m$ y velocidad $\vec{v}$ está dada por:

$$T = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$$

Recordando que $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, encontremos la posición de cada masa, luego derivamos para encontrar su velocidad, y así podremos encontrar su energía cinética. Para la masa $m_1$:

$$x_1 = l_1 \sin(\theta_1) \ ; \ y_1 = -l_1 \cos(\theta_1)$$

Y, para la masa $m_2$:

$$x_2 = x_1 + l_2 \sin(\theta_2) \ ; \ y_2 = y_1 - l_2 \cos(\theta_2)$$

De esta manera, derivando con respecto al tiempo tendremos que:

$$\dot{x}_1 = l_1\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \ ; \ \dot{y}_1 = l_1\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1)$$
$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \ ; \ \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)$$

Para una velocidad expresada en coordenadas cartesianas, tendremos que:

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

De esta manera:

$$|\vec{v}_1|^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_1) + l_1^2\dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_1) \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}_1|^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2$$

Y, para $\vec{v}_2$:

$$|\vec{v}_2|^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = (\dot{x}_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2))^2 + (\dot{y}_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2))^2$$
$$\Rightarrow \quad |\vec{v}_2|^2 = \dot{x}_1^2 + 2l_2\dot{x}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + l_2^2\dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_2) + \dot{y}_1^2 + 2l_2\dot{y}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) + l_2^2\dot{\theta}_2^2 \sin^2(\theta_2)$$

Notamos que $\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = |\vec{v}_1|^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2$, además usamos que $\dot{x}_1 = l_1\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1)$ e $\dot{y}_1 = l_1\dot{\theta}_1 \sin(\theta_1)$, entonces:

$$|\vec{v}_2|^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$$
$$\Rightarrow |\vec{v}_2|^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2))$$

Usamos la relación trigonométrica $\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta)$, de esta forma:

$$|\vec{v}_2|^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Como tenemos el módulo de la velocidad de cada masa, podemos conocer la energía cinética de cada una, y por ende, la energía cinética del sistema general, entonces:

$$T = \frac{1}{2}m_1|\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{v}_2|^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \qquad (1)$$

Ahora, la energía potencial de una partícula con masa $m$ y altura $h$ medida desde nuestro sistema de referencia está dada por:

$$V = mgh$$

En nuestro caso, la altura estará dada por la coordenada $y$ de cada masa. Entonces, para $m_1$:

$$V_1 = m_1gy_1 \quad \Rightarrow \quad V_1 = -m_1gl_1\cos(\theta_1)$$

Por otro lado, para $m_2$:

$$V_2 = m_2gy_2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = -m_2g(l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_2))$$

Entonces, al igual que con la energía cinética, sumamos la energía potencial de ambas partículas para obtener la energía potencial del sistema completo, así:

$$V = m_1gy_1 + m_2gy_2 \quad \Rightarrow \quad V = -m_1gl_1\cos(\theta_1) - m_2g(l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_2))$$

$$\Rightarrow V = -(m_1 + m_2)gl_1\cos(\theta_1) - m_2gl_2\cos(\theta_2) \qquad (2)$$

Entonces, usando lo encontrado en (1) y (2) podemos armar el lagrangiano $L$, y así:

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) + (m_1 + m_2)gl_1\cos(\theta_1) + m_2gl_2\cos(\theta_2)}$$

b) Al ver el sistema notamos que la posición de equilibrio de este péndulo doble es $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Entonces, sean $\eta_1 = \theta_1$ y $\eta_2 = \theta_2$ pequeñas oscilaciones en torno al equilibrio, en ese caso tenemos las siguientes aproximaciones:

$$\cos(\eta_1) \approx 1 - \frac{\eta_1^2}{2} \quad ; \quad \cos(\eta_2) \approx 1 - \frac{\eta_2^2}{2} \quad ; \quad \cos(\eta_1 - \eta_2) \approx 1 - \frac{(\eta_1 - \eta_2)^2}{2}$$

Ahora, conservando sólo términos cuadráticos[1], se tiene el lagrangiano cuadrático:

$$\Rightarrow\ L^{[2]} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\eta}_1^2+m_2l_1l_2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2+\frac{1}{2}m_2l_2\dot{\eta}_2^2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)gl_1\eta_1^2-\frac{1}{2}m_2gl_2\eta_2^2+(m_1+m_2)gl_1+m_2gl_2$$

Ignoramos las constantes del final, ya que pueden considerarse una derivada total en el tiempo y por lo tanto no afectan a la dinámica del sistema, entonces:

$$\Rightarrow\ \boxed{L^{[2]} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\eta}_1^2+m_2l_1l_2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2+\frac{1}{2}m_2l_2\dot{\eta}_2^2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)gl_1\eta_1^2-\frac{1}{2}m_2gl_2\eta_2^2}$$

Ahora, recordamos de clases que el lagrangiano cuadrático puede escribirse matricialmente como:

$$L^{[2]} = \frac{1}{2}M_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j - \frac{1}{2}K_{ij}\eta_i\eta_j$$

Con esta definición, los términos en la expresión para $L^{[2]}$ que están elevados al cuadrado estarán en la diagonal de las matrices, mientras que aquellos términos que son multiplicaciones de distintas coordenadas irán en la antidiagonal. Para hacer un análisis un poco más cuidadoso separemos los términos cinéticos y potenciales. Primero tenemos que:

$$\frac{1}{2}M_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\eta}_1^2+m_2l_1l_2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2+\frac{1}{2}m_2l_2\dot{\eta}_2^2$$
$$\Rightarrow\ M_{ij}\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j = (m_1+m_2)l_1^2\dot{\eta}_1^2+2m_2l_1l_2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2+m_2l_2\dot{\eta}_2^2$$

Vemos directamente que las constantes del primer y último término irán en la diagonal de $M_{ij}$, mientras que la constante del otro término debe ser separada en dos partes iguales[2] que irán en la antidiagonal, entonces:

$$\Rightarrow\ \boxed{M = \begin{pmatrix} (m_1+m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2 \\ m_2l_1l_2 & m_2l_2^2 \end{pmatrix}}$$

Ahora vemos qué sucede con la otra parte de la expresión matricial:

$$\frac{1}{2}K_{ij}\eta_i\eta_j = \frac{1}{2}(m_1+m_2)gl_1\eta_1^2+\frac{1}{2}m_2gl_2\eta_2^2$$
$$\Rightarrow\ K_{ij}\eta_i\eta_j = (m_1+m_2)gl_1\eta_1^2+m_2gl_2\eta_2^2$$

En este caso vemos que sólo aparecen las coordenadas al cuadrado, y por lo tanto $K_{ij}$ sólo tendrá términos en la diagonal, entonces:

$$\Rightarrow\ \boxed{K = \begin{pmatrix} (m_1+m_2)gl_1 & 0 \\ 0 & m_2gl_2 \end{pmatrix}}$$

[1]En el caso de las coordenadas $\eta$ esto es por aproximación de ángulos pequeños, mientras que en el caso de la velocidad no podemos mantener términos que involucren una combinación de los $\eta$ y $\dot{\eta}$ por la estructura buscada del lagrangiano cuadrático.

[2]Recordando que por definición $M_{ij}$ es simétrica.

c) En clases vimos que la ecuación de movimiento de la coordenada $\eta_i$ es:

$$M_{ij}\ddot{\eta}_j = -K_{ij}\eta_j$$

Esta notación nos dice que es posible escribir las ecuaciones de movimiento matricialmente usando el vector $\vec{\eta}$, entonces:

$$M\ddot{\vec{\eta}} = -K\vec{\eta}$$

Entonces, escribiendo explícitamente las matrices y el vector, tendremos que:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (m_1+m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} (m_1+m_2)g l_1 & 0 \\ 0 & m_2 g l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

Tal como se mostró en clases, usamos el siguiente ansatz:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{i\omega t} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

La idea de este ansatz es que ambas perturbaciones oscilan con la misma frecuencia, y de esa forma la dependencia temporal queda fuera del vector, y la aceleración (vectorial) es proporcional a la posición. Reemplazando este ansatz en el sistema matricial y desarrollando, se tiene que:

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} (m_1+m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{i\omega t} = -\begin{pmatrix} (m_1+m_2)g l_1 & 0 \\ 0 & m_2 g l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (m_1+m_2)(l_1^2\omega^2 - g l_1) & m_2 l_1 l_2 \omega^2 \\ m_2 l_1 l_2 \omega^2 & m_2(l_2^2\omega^2 - g l_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Si queremos una solución no trivial (es decir, aquella donde $A = B = 0$ y los péndulos no se mueven) entonces necesitamos que el determinante de la matriz mostrada anteriormente sea cero. Entonces:

$$\det \begin{pmatrix} (m_1+m_2)(l_1^2\omega^2 - g l_1) & m_2 l_1 l_2 \omega^2 \\ m_2 l_1 l_2 \omega^2 & m_2(l_2^2\omega^2 - g l_2) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow\; m_2(m_1+m_2)(l_1^2\omega^2 - g l_1)(l_2^2\omega^2 - g l_2) - m_2^2 l_1^2 l_2^2 \omega^4 = 0$$

$$\Rightarrow\; (m_1+m_2)(l_1\omega^2 - g)(l_2\omega^2 - g) - m_2 l_1 l_2 \omega^4 = 0$$

Desarrollando la expresion anterior se llega a un polinomio de orden 4 para $\omega$, que es equivalente a encontrar un polinomio de orden 2 para $\omega^2$:

$$m_1 l_1 l_2 \omega^4 - (m_1+m_2)(l_1+l_2)g\omega^2 + (m_1+m_2)g^2 = 0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática para $\omega^2$, y entonces encontramos las frecuencias de oscilación:

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{(m_1+m_2)(l_1+l_2)g \pm \sqrt{(m_1+m_2)^2(l_1+l_2)^2 g^2 - 4(m_1+m_2)m_1 l_1 l_2 g^2}}{2 m_1 l_1 l_2}}$$

Ahora, en el caso $m_1 = m_2 = m$ y $l_1 = l_2 = l$ se tiene que:

$$\Rightarrow \ \omega^2 = \frac{4mlg \pm \sqrt{16m^2l^2g^2 - 8m^2l^2g^2}}{2ml^2} \ \Rightarrow \ \omega^2 = (2 \pm \sqrt{2})\frac{g}{l}$$

Como las frecuencias son definidas positivas, entonces al aplicar raíz cuadrada sólo tomamos en cuenta la raíz positiva, y así las frecuencias de oscilación de este péndulo doble son:

$$\Rightarrow \boxed{\omega_1 = \sqrt{(2 - \sqrt{2})\frac{g}{l}} \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{(2 + \sqrt{2})\frac{g}{l}}}$$

Para encontrar el modo de oscilación de cada una de estas frecuencias reemplazamos $\omega^2$ en la expresión (3) y resolvemos el sistema para encontrar una relación entre $A$ y $B$. El sistema matricial con las condiciones estudiadas ahora es:

$$\begin{pmatrix} 2ml(l\omega^2 - g) & ml^2\omega^2 \\ ml^2\omega^2 & ml(l\omega^2 - g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2(l\omega^2 - g) & l\omega^2 \\ l\omega^2 & l\omega^2 - g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde en el último paso se simplificó por $ml$. Partiendo por $\omega_1^2$:

$$\begin{pmatrix} 2((2 - \sqrt{2})g - g) & (2 - \sqrt{2})g \\ (2 - \sqrt{2})g & (2 - \sqrt{2})g - g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 - 2\sqrt{2} & 2 - \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ (2 - \sqrt{2})A + (1 - \sqrt{2})B = 0 \ \Rightarrow \ B = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}\right) A$$

Con esto, vemos que el primer modo de oscilación $\vec{v}_1$ asociado a la frecuencia de oscilación $\omega_1$ es:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \end{pmatrix}}$$

Como ambas componentes son positivas, esto significa que este modo de oscilación corresponde a ambos péndulos oscilando en el mismo sentido, con una amplitud que sigue la proporción entre las componentes de $\vec{v}_1$. Ahora hacemos el mismo procedimiento con $\omega_2^2$:

$$\begin{pmatrix} 2((2 + \sqrt{2})g - g) & (2 + \sqrt{2})g \\ (2 + \sqrt{2})g & (2 + \sqrt{2})g - g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 + 2\sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{2} & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ (2 + \sqrt{2})A + (1 + \sqrt{2})B = 0 \ \Rightarrow \ B = -\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\right) A$$

Con esto obtenemos el segundo modo de oscilación $\vec{v}_2$, el cual está asociado a la frecuencia $\omega_2$:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$$

Como en este caso ambas componentes del vector son de signo contrario, esto significa que los péndulos en este modo de oscilación se moverán en desfase, y de forma análoga al modo encontrado anteriormente esta oscilación será con una amplitud relativa entre ambas igual a la razón entre las componentes de $\vec{v}_2$.

Para finalizar, en la página web `https://www.math24.net/double-pendulum/` hay gran información sobre este sistema físico, además de una simulación interactiva que puede ser de interés para ustedes.