FI3101-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Roberto Gajardo, David Pinto.

Desarrollo Auxiliar 5: Símbolos de Christoffel y fuerzas centrales.

13 de Octubre del 2020

P1. Coordenadas elípticas:

a) Las componentes g_{ij} de la métrica se pueden definir a través de un diferencial de curva como:

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

Por ejemplo, en el caso de coordenadas rectangulares se tiene que:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \;\Rightarrow\; g_{ij} = \delta_{ij} \tag{1}$$

Donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. En el caso de un espacio tridimensional la métrica también puede representarse a través de una matriz, donde en el caso de coordenadas rectangulares:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, en el caso particular de este ejercicio se tienen *coordenadas elípticas*. Estas coordenadas están relacionadas con las coordenadas rectangulares a partir de las siguientes expresiones:

$$x = \cosh(\mu)\cos(\nu) \quad ; \quad y = \sinh(\mu)\sin(\nu) \quad ; \quad z = z$$

Donde $\mu \geq 0$ y $\nu \in [0, 2\pi)$. Para encontrar las componentes de la métrica (las cuales necesitamos para calcular los símbolos de Christoffel) nos conviene encontrar los diferenciales dx, dy y dz a partir de las relaciones mostradas anteriormente. En virtud de la regla de la cadena se tiene que:

$$dx = \sinh(\mu)\cos(\nu)d\mu - \cosh(\mu)\sin(\nu)d\nu \quad ; \quad dy = \cosh(\mu)\sin(\nu)d\mu + \sinh(\mu)\cos(\nu)d\nu \quad ; \quad dz = dz$$

Elevamos al cuadrado estas expresiones y sumamos para encontrar ds^2 a partir de su definición con coordenadas rectangulares mostrada en (1). Entonces:

$$ds^2 = (\sinh(\mu)\cos(\nu)d\mu - \cosh(\mu)\sin(\nu)d\nu)^2 + (\cosh(\mu)\sin(\nu)d\mu + \sinh(\mu)\cos(\nu)d\nu)^2 + dz^2$$

$$\Rightarrow\; ds^2 = \left(\sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu)\right)d\mu^2 + \left(\cosh^2(\mu)\sin^2(\nu) + \sinh^2(\mu)\cos^2(\nu)\right)d\nu^2 + dz^2$$

Se puede notar que el término que acompaña a $d\mu^2$ y $d\nu^2$ es el mismo. Sumando un cero conveniente es posible desarrollar un poco más esa expresión:

$$\sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu) = \sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu) + \sinh^2(\mu)\sin^2(\nu) - \sinh^2(\mu)\sin^2(\nu)$$

$$\Rightarrow\; \sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu) = \left(\sin^2(\nu) + \cos^2(\nu)\right)\sinh^2(\mu) + \left(\cosh^2(\mu) - \sinh^2(\mu)\right)\sin^2(\nu)$$

$$\Rightarrow\; \sinh^2(\mu)\cos^2(\nu) + \cosh^2(\mu)\sin^2(\nu) = \sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)$$

Entonces, reemplazando en la expresión para ds^2:

$$\Rightarrow \; ds^2 = \Big(\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)\Big)\, d\mu^2 + \Big(\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)\Big)\, d\nu^2 + dz^2$$

Así, las componentes de la métrica en estas coordenadas son:

$$\boxed{g_{11} = \sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu) \quad ; \quad g_{22} = \sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu) \quad ; \quad g_{33} = 1 \quad ; \quad g_{ij} = 0 \;,\; i \neq j}$$

O escrita en forma matricial:

$$\Rightarrow \boxed{g_{ij} = \begin{pmatrix} \sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu) & 0 & 0 \\ 0 & \sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) Se tiene la siguiente definición para los símbolos de Christoffel de un sistema de coordenadas:

$$\Gamma^j_{lm} = \frac{1}{2} g^{jk} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} \right) \tag{2}$$

Donde $\{x^1, x^2, x^3\}$ son las coordenadas asociadas a la métrica g, y g^{ij} (superíndices) indica la inversa de g_{ij}, es decir:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sinh^2(\mu)+\sin^2(\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sinh^2(\mu)+\sin^2(\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso, al ser coordenadas elípticas, se tiene que $\{x^1, x^2, x^3\} = \{\mu, \nu, z\}$, y entonces en conjunto con lo encontrado en la parte anterior, se tiene que:

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial \mu} = 2\sinh(\mu)\cosh(\mu) \quad ; \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial \nu} = 2\sin(\nu)\cos(\nu) \quad ; \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial \mu} = 2\sinh(\mu)\cosh(\mu) \quad ; \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial \nu} = 2\sin(\nu)\cos(\nu) \quad ; \quad \frac{\partial g_{22}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial g_{33}}{\partial \mu} = \frac{\partial g_{33}}{\partial \nu} = \frac{\partial g_{33}}{\partial z} = 0$$

Para entender todo el procedimiento de calcular un símbolo de Christoffel, calculamos Γ^1_{11} de forma explícita. Desde la definición (2) se tiene que:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{1k} \left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k} \right)$$

Notamos que el ínidce k se contrae con las tres expresiones dentro del paréntesis, lo que nos dice, por notación de Newton, que cada uno de esos términos involucra una suma implícita. Para dejarlo más claro, se desarrolla de tal forma que hacemos aparecer la suma implícita:

$$\Rightarrow \; \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{1k} \frac{\partial g_{1k}}{\partial x^1} + \frac{1}{2} g^{1k} \frac{\partial g_{1k}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} g^{1k} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \ \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} g^{1k}\frac{\partial g_{1k}}{\partial x^1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} g^{1k}\frac{\partial g_{1k}}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} g^{1k}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^k} \tag{4}$$

Para acostumbrarnos a la notación de Einstein[1] seguiremos trabajando con la expresión (3). Escribiendo la suma de forma explícita con las distintas componentes de la métrica:

$$\Rightarrow \ \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\left(g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + g^{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + g^{13}\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} + g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + g^{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2}\right.$$
$$\left. + g^{13}\frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} - g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - g^{12}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - g^{13}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3}\right)$$

Ahora que todos los términos de Γ^1_{11} están escritos explícitamente podemos empezar a descartar aquellos términos que sean cero. En nuestro caso particular, como la métrica es diagonal, todos los términos g_{ij}, con $i \neq j$, son cero, y así:

$$\Rightarrow \ \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\left(g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial \mu} + g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial \nu} - g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial \mu}\right)$$

Donde se cambió x^1, x^2 y x^3 por μ, ν y z, respectivamente. Notamos que se cancelan un par de términos, y entonces reemplazando con lo conocido para nuestra métrica:

$$\Rightarrow \ \Gamma^1_{11} = \frac{\sinh(\mu)\cosh(\mu)}{\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)}$$

Ahora, es posible evitar algunos pasos de este procedimiento si sacamos ventaja del hecho de que la métrica es diagonal, y de que g_{33} es constante. Por ejemplo, si ahora calculamos Γ^1_{12}:

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}g^{1k}\left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial \nu} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial \mu} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^k}\right)$$

Notamos que el último término es cero en virtud de que $g_{12} = 0$. Por otro lado, como la métrica es diagonal, entonces $g^{1k} = 0$ en el caso $k \neq 1$, con lo cual k sólo puede ser igual a uno, y así:

$$\Rightarrow \ \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}\left(g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial \nu} + g^{11}\frac{\partial g_{21}}{\partial \mu}\right)$$

El segundo término es cero ya que $g_{21} = 0$, mientras que en el otro término reemplazamos las expresiones encontradas en la página anterior, y así:

$$\Rightarrow \ \Gamma^1_{12} = \frac{\sin(\nu)\cos(\nu)}{\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)}$$

Para Γ^1_{13} se tiene que:

$$\Gamma^1_{13} = \frac{1}{2}g^{1k}\left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial z} + \frac{\partial g_{3k}}{\partial \mu} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^k}\right)$$

El último término es cero porque $g_{13} = 0$, mientras que el segundo término es cero ya que cualquier derivada de una componente g_{ij}, con i o j igual a 3, es cero.

[1] Al comparar las expresiones (3) y (4) podemos apreciar de forma directa cómo se usa la notación de Einstein.

Por otro lado, como la métrica es diagonal entonces k sólo puede ser igual a 1, y así:

$$\Rightarrow\ \Gamma^1_{13} = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial z}\ \Rightarrow\ \Gamma^1_{13} = 0$$

Para Γ^1_{23}:

$$\Gamma^1_{23} = \frac{1}{2} g^{1k} \left(\frac{\partial g_{2k}}{\partial z} + \frac{\partial g_{3k}}{\partial \nu} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^k} \right)$$

Recordando que la métrica es diagonal, eso restringe el valor de k a 1, con eso, se tiene que:

$$\Rightarrow\ \Gamma^1_{23} = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial z} + \frac{\partial g_{31}}{\partial \nu} - \frac{\partial g_{23}}{\partial \mu} \right)\ \Rightarrow\ \Gamma^1_{23} = 0$$

Donde todos los términos son cero, ya que involucran elementos no diagonales de la métrica (la cual es diagonal).

Una última propiedad que nos puede servir para facilitar el cálculo de los símbolos de Christoffel es que $\Gamma^j_{lm} = \Gamma^j_{ml}$, lo que es consecuencia de que la métrica es un tensor simétrico. Con eso se tiene que:

$$\Gamma^1_{21} = \frac{\sin(\nu)\cos(\nu)}{\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)} \quad ; \quad \Gamma^1_{31} = 0 \quad ; \quad \Gamma^1_{32} = 0$$

Ahora sólo nos quedan dos términos. Para Γ^1_{22}:

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{1k} \left(\frac{\partial g_{2k}}{\partial \nu} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial \nu} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial \nu} + \frac{\partial g_{21}}{\partial \nu} - \frac{\partial g_{22}}{\partial \mu} \right)$$

Los primeros dos términos son cero ya que $g_{21} = 0$, mientras que el último se reemplaza desde nuestros resultados de la parte anterior, y entonces:

$$\Rightarrow\ \Gamma^1_{22} = -\frac{\sinh(\mu)\cosh(\mu)}{\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)}$$

Ahora sólo nos falta Γ^1_{33}:

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2} g^{1k} \left(\frac{\partial g_{3k}}{\partial z} + \frac{\partial g_{3k}}{\partial z} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{31}}{\partial z} + \frac{\partial g_{31}}{\partial z} - \frac{\partial g_{33}}{\partial \mu} \right)\ \Rightarrow\ \Gamma^1_{33} = 0$$

Donde todos los términos son cero en virtud de que $g_{31} = 0$ y g_{33} es constante (y por lo tanto su derivada es nula). Con esto, se obtienen los nueve símbolos de Christoffel asociados a $j = 1$, los cuales pueden resumirse en una matriz[2]:

$$\boxed{\Gamma^1 = \begin{pmatrix} \frac{\sinh(\mu)\cosh(\mu)}{\sinh^2(\mu)+\sin^2(\nu)} & \frac{\sin(\nu)\cos(\nu)}{\sinh^2(\mu)+\sin^2(\nu)} & 0 \\ \frac{\sin(\nu)\cos(\nu)}{\sinh^2(\mu)+\sin^2(\nu)} & -\frac{\sinh(\mu)\cosh(\mu)}{\sinh^2(\mu)+\sin^2(\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

[2]Es importante entender que a pesar de esta representación, los símbolos de Christoffel **no** son tensores.

Para $j = 2$ y $j = 3$ se escribirán los cálculos y sólo se harán comentarios en casos donde sea necesario acotar algo nuevo. Partiendo por Γ^2_{11}:

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2} g^{2k} \left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial \mu} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial \mu} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k} \right)$$

La forma más sencilla de eliminar varios términos a la vez es apelar a la diagonalidad de la métrica, la cual fija el valor de k (en este caso en particular, $k = 2$). Entonces:

$$\Rightarrow \; \Gamma^2_{11} = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial \mu} + \frac{\partial g_{12}}{\partial \mu} - \frac{\partial g_{11}}{\partial \nu} \right) \; \Rightarrow \; \Gamma^2_{11} = -\frac{\sin(\nu)\cos(\nu)}{\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)}$$

Ahora para Γ^2_{22}:

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2} g^{2k} \left(\frac{\partial g_{2k}}{\partial \nu} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial \nu} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \nu} + \frac{\partial g_{22}}{\partial \nu} - \frac{\partial g_{22}}{\partial \nu} \right)$$

$$\Rightarrow \; \Gamma^2_{22} = \frac{\sin(\nu)\cos(\nu)}{\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)}$$

Calculando Γ^2_{33}:

$$\Gamma^2_{33} = \frac{1}{2} g^{2k} \left(\frac{\partial g_{3k}}{\partial z} + \frac{\partial g_{3k}}{\partial z} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{32}}{\partial z} + \frac{\partial g_{32}}{\partial z} - \frac{\partial g_{33}}{\partial \nu} \right) \; \Rightarrow \; \Gamma^2_{33} = 0$$

Calculando Γ^2_{12}:

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2} g^{2k} \left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial \nu} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial \mu} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial \nu} + \frac{\partial g_{22}}{\partial \mu} - \frac{\partial g_{12}}{\partial \nu} \right)$$

Como $g_{12} = 0$, entonces:

$$\Rightarrow \; \Gamma^2_{12} = \frac{\sinh(\mu)\cosh(\mu)}{\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)} \quad ; \quad \Gamma^2_{21} = \frac{\sinh(\mu)\cosh(\mu)}{\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)}$$

Donde se usó la propiedad $\Gamma^j_{lm} = \Gamma^j_{ml}$ para obtener directamente otro símbolo de Christoffel. Calculando Γ^2_{13}:

$$\Gamma^2_{13} = \frac{1}{2} g^{2k} \left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial z} + \frac{\partial g_{3k}}{\partial \mu} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial z} + \frac{\partial g_{32}}{\partial \mu} - \frac{\partial g_{13}}{\partial \nu} \right)$$

Notamos que todas las componentes que están dentro del paréntesis son componentes no diagonales de la métrica, y por lo tanto:

$$\Rightarrow \; \Gamma^2_{13} = 0 \quad ; \quad \Gamma^2_{31} = 0$$

Por último calculamos Γ^2_{23}:

$$\Gamma^2_{23} = \frac{1}{2} g^{2k} \left(\frac{\partial g_{2k}}{\partial z} + \frac{\partial g_{3k}}{\partial \nu} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial z} + \frac{\partial g_{32}}{\partial \nu} - \frac{\partial g_{23}}{\partial \nu} \right)$$

$$\Rightarrow \; \Gamma^2_{23} = 0 \quad ; \quad \Gamma^2_{32} = 0$$

Resumimos los resultados para $j = 2$ en la siguiente matriz:

$$\boxed{\Gamma^2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\nu)\cos(\nu)}{\sinh^2(\mu)+\sin^2(\nu)} & \frac{\sinh(\mu)\cosh(\mu)}{\sinh^2(\mu)+\sin^2(\nu)} & 0 \\ \frac{\sinh(\mu)\cosh(\mu)}{\sinh^2(\mu)+\sin^2(\nu)} & \frac{\sin(\nu)\cos(\nu)}{\sinh^2(\mu)+\sin^2(\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Por último, realizamos los cálculos $j = 3$. Partiendo por Γ^3_{11}:

$$\Gamma^3_{11} = \frac{1}{2}g^{3k}\left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial \mu} + \frac{\partial g_{1k}}{\partial \mu} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial \mu} + \frac{\partial g_{13}}{\partial \mu} - \frac{\partial g_{11}}{\partial z}\right) \Rightarrow \Gamma^3_{11} = 0$$

Continuando con Γ^3_{22}:

$$\Gamma^3_{22} = \frac{1}{2}g^{3k}\left(\frac{\partial g_{2k}}{\partial \nu} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial \nu} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial \nu} + \frac{\partial g_{23}}{\partial \nu} - \frac{\partial g_{22}}{\partial z}\right) \Rightarrow \Gamma^3_{22} = 0$$

Siguiendo con Γ^3_{33}:

$$\Gamma^3_{33} = \frac{1}{2}g^{3k}\left(\frac{\partial g_{3k}}{\partial z} + \frac{\partial g_{3k}}{\partial z} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{33}}{\partial z} + \frac{\partial g_{33}}{\partial z} - \frac{\partial g_{33}}{\partial z}\right) \Rightarrow \Gamma^3_{33} = 0$$

Ahora seguimos con los términos donde $m \neq l$. Partiendo con Γ^3_{12}:

$$\Gamma^3_{12} = \frac{1}{2}g^{3k}\left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial \nu} + \frac{\partial g_{2k}}{\partial \mu} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial \nu} + \frac{\partial g_{23}}{\partial \mu} - \frac{\partial g_{12}}{\partial z}\right) \Rightarrow \Gamma^3_{12} = 0 \quad ; \quad \Gamma^3_{21} = 0$$

Continuando con Γ^3_{13}:

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}g^{3k}\left(\frac{\partial g_{1k}}{\partial z} + \frac{\partial g_{3k}}{\partial \mu} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{13}}{\partial z} + \frac{\partial g_{33}}{\partial \mu} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3}\right) \Rightarrow \Gamma^3_{13} = 0 \quad ; \quad \Gamma^3_{31} = 0$$

Por último, se calcula Γ^3_{23}:

$$\Gamma^3_{23} = \frac{1}{2}g^{3k}\left(\frac{\partial g_{2k}}{\partial z} + \frac{\partial g_{3k}}{\partial \nu} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{23}}{\partial z} + \frac{\partial g_{33}}{\partial \nu} - \frac{\partial g_{23}}{\partial z}\right) \Rightarrow \Gamma^3_{23} = 0 \quad ; \quad \Gamma^3_{32} = 0$$

Notamos que todos los símbolos de Christoffel asociados a $j = 3$ son nulos, y entonces en resumen:

$$\boxed{\Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) La 2da ley de Newton para la coordenada generalizada x^i, en forma covariante, es:

$$Mg_{ij}\left(\ddot{x}^j + \Gamma^j_{lm}\dot{x}^l\dot{x}^m\right) = -\frac{\partial U}{\partial x^i}$$

Para $i = 1$ (es decir, $x^1 = \mu$) se tiene que:

$$Mg_{1j}\left(\ddot{x}^j + \Gamma^j_{lm}\dot{x}^l\dot{x}^m\right) = -\frac{\partial U}{\partial \mu}$$

Como la métrica es diagonal, entonces $j = 1$, y así:

$$\Rightarrow\ Mg_{11}\left(\ddot{\mu} + \Gamma^1_{lm}\dot{x}^l\dot{x}^m\right) = -\frac{\partial U}{\partial \mu}\ \Rightarrow\ M\left(\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)\right)\left(\ddot{\mu} + \Gamma^1_{lm}\dot{x}^l\dot{x}^m\right) = -\frac{\partial U}{\partial \mu}$$

Notamos que los ínidices m y l están contraídos, lo cual indica una suma explícita sobre estos índices. Expandimos la suma de forma explícita para m, y así:

$$\Rightarrow\ M\left(\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)\right)\left(\ddot{\mu} + \Gamma^1_{l1}\dot{\mu}\dot{x}^l + \Gamma^1_{l2}\dot{\nu}\dot{x}^l + \Gamma^1_{l3}\dot{z}\dot{x}^l\right) = -\frac{\partial U}{\partial \mu}$$

El siguiente paso lógico sería expandir la suma en el índice l, sin embargo como sabemos cuánto valen los símbolos de Christoffel, podemos ver qué términos serán nulos. En particular, el último término es cero ya que $\Gamma^1_{l3} = 0$ para cualquier valor de l. Por otro lado, y por la misma razón, al expandir la suma en l sólo tomamos los dos primeros términos (ignorando $l = 3$). Entonces:

$$\Rightarrow\ M\left(\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)\right)\left(\ddot{\mu} + \Gamma^1_{11}\dot{\mu}^2 + \Gamma^1_{21}\dot{\mu}\dot{\nu} + \Gamma^1_{12}\dot{\nu}\dot{\mu} + \Gamma^1_{22}\dot{\nu}^2\right) = -\frac{\partial U}{\partial \mu}$$

Reemplazando los valores para los símbolos de Christoffel y reordenando, se tiene la ecuación de movimiento para la coordenada μ:

$$\Rightarrow\ \boxed{\ddot{\mu} + \frac{\sinh(\mu)\cosh(\mu)}{\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)}\left(\dot{\mu}^2 - \dot{\nu}^2\right) + \frac{2\sin(\nu)\cos(\nu)}{\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)}\dot{\mu}\dot{\nu} + \frac{\partial_\mu U}{M\left(\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)\right)} = 0}$$

Ahora, para ν ($i = 2$) se tiene que:

$$Mg_{2j}\left(\ddot{x}^j + \Gamma^j_{lm}\dot{x}^l\dot{x}^m\right) = -\frac{\partial U}{\partial \nu}$$

Como la métrica es diagonal, entonces $j = 2$, y así:

$$\Rightarrow\ Mg_{22}\left(\ddot{\nu} + \Gamma^2_{lm}\dot{x}^l\dot{x}^m\right) = -\frac{\partial U}{\partial \nu}\ \Rightarrow\ M\left(\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)\right)\left(\ddot{\nu} + \Gamma^2_{lm}\dot{x}^l\dot{x}^m\right) = -\frac{\partial U}{\partial \nu}$$

Expandimos la suma sobre el índice m (ignorando $m = 3$ ya que los símbolos de Christoffel asociados a ese índice son cero) y entonces:

$$\Rightarrow\ M\left(\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)\right)\left(\ddot{\nu} + \Gamma^2_{l1}\dot{x}^l\dot{\mu} + \Gamma^2_{l2}\dot{x}^l\dot{\nu}\right) = -\frac{\partial U}{\partial \nu}$$

$$\Rightarrow\ M\left(\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)\right)\left(\ddot{\nu} + \Gamma^2_{11}\dot{\mu}^2 + \Gamma^2_{21}\dot{\nu}\dot{\mu} + \Gamma^2_{12}\dot{\mu}\dot{\nu} + \Gamma^2_{22}\dot{\nu}^2\right) = -\frac{\partial U}{\partial \nu}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\ddot{\nu} + \frac{\sin(\nu)\cos(\nu)}{\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)}\left(\dot{\nu}^2 - \dot{\mu}^2\right) + \frac{2\sinh(\mu)\cosh(\mu)}{\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)}\dot{\mu}\dot{\nu} + \frac{\partial_\nu U}{M\left(\sinh^2(\mu) + \sin^2(\nu)\right)} = 0}$$

Finalmente buscamos la ecuación de movimiento asociada a $i = 3$, es decir, para la coordenada z:

$$Mg_{3j}\left(\ddot{x}^j + \Gamma^j_{lm}\dot{x}^l\dot{x}^m\right) = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Como la métrica es diagonal, entonces $j = 3$, y así:

$$\Rightarrow\ Mg_{33}\left(\ddot{z} + \Gamma^3_{lm}\dot{x}^l\dot{x}^m\right) = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

El siguiente paso correspondería a expandir la suma asociada a los índices l y m, sin embargo sabemos que todos los índices de Christoffel de la forma Γ^3_{lm} son nulos, mientras que $g_{33} = 1$, y entonces:

$$\Rightarrow\ \boxed{\ddot{z} + \frac{\partial_z U}{M} = 0}$$

Con lo cual obtenemos la tercera ecuación de movimiento de la partícula.

P2. Partícula en campo central:

a) El potencial asociado a esta fuerza conservativa puede calcularse a partir de la relación $\vec{F} = -\nabla U$, entonces:

$$\vec{F} = -\nabla U \;\Rightarrow\; -ar^n\hat{r} = -\frac{\partial U}{\partial r}\hat{r} \;\Rightarrow\; \frac{\partial U}{\partial r} = ar^n \;\Rightarrow\; U(r) = \frac{ar^{n+1}}{n+1} + U_0$$

Donde U_0 da cuenta de un potencial de referencia (el cual usaremos igual a cero), y se ignoraron las demás componentes del gradiente por el hecho de que la fuerza $\vec{F}$ sólo tiene componente radial. Ahora, al ser una fuerza central el movimiento será en un plano, y por lo tanto podemos escribir la velocidad en coordenadas polares:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \;\Rightarrow\; T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

Con esto es posible construir el lagrangiano del sistema, y entonces:

$$\Rightarrow\; L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{ar^{n+1}}{n+1}$$

Como el lagrangiano no depende del tiempo, entonces la energía E se conserva. Calculando:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - L = m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{ar^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow\; E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{ar^{n+1}}{n+1}$$

Por otro lado, como el lagrangiano no depende explícitamente de la coordenada θ, entonces el momento angular (que anotaremos como ℓ) se conserva:

$$\ell = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \;\Rightarrow\; \ell = mr^2\dot{\theta}$$

Reemplazando $r = R$ en estas cantidades conservadas (tomando en cuenta que $\dot{r} = 0$), se tienen las siguientes cantidades conservadas para las órbitas circulares de radio R asociadas a este potencial:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{aR^{n+1}}{n+1} \quad ; \quad \ell = mR^2\dot{\theta}}$$

b) A partir de la cantidad E es posible despejar $\dot{\theta}$, con lo cual podemos encontrar una expresión integral que relacione t y θ:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{mR^2}\left(E - \frac{aR^{n+1}}{n+1}\right)} \;\Rightarrow\; \int_{t_0}^{t} dt = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}\left(E - \frac{aR^{n+1}}{n+1}\right)}}$$

En general (cuando r no es constante) la cantidad que viene desde el potencial (lo que se está restando a la energía) depende del ángulo, con lo cual la segunda integral se complica[3], sin embargo como en este caso todo es constante, es posible integrar directamente.

[3]En general se puede transformar en integrales elípticas, como se verá en cátedra.

Entonces, integrando:

$$\Rightarrow\ t - t_0 = \frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}\left(E - \frac{aR^{n+1}}{n+1}\right)}}$$

Para un período T_{orb} se tiene que $t = T_{orb} + t_0$, mientras que por definición de período en ese caso se tendrá $\theta = 2\pi + \theta_0$. Reemplazando:

$$T_{orb} + t_0 - t_0 = \frac{2\pi + \theta_0 - \theta_0}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}\left(E - \frac{aR^{n+1}}{n+1}\right)}} \ \Rightarrow\ \boxed{T_{orb} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}\left(E - \frac{aR^{n+1}}{n+1}\right)}}}$$

c) Sea $r = R + \varepsilon(t)$, donde $\varepsilon \ll R$ es una perturbación. En ese caso se tiene que $\dot{r} = \dot{\varepsilon}$, mientras que a partir de la conservación del momento angular es posible reescribir $\dot{\theta}$ en función de constantes:

$$\dot{\theta} = \frac{\ell}{mR^2}$$

Entonces, reemplazando en la energía E (para la expresión $\dot{r} \neq 0$) se tiene que:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{ar^{n+1}}{n+1} \ \Rightarrow\ E = \frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}^2 + \frac{\ell^2}{2mR^4}(R+\varepsilon)^2 + \frac{a}{n+1}(R+\varepsilon)^{n+1}$$

Recordamos la siguiente aproximación para ε pequeño:

$$(R+\varepsilon)^k = R^k\left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right)^k \ \Rightarrow\ (R+\varepsilon)^k \approx R^k\left(1 + k\frac{\varepsilon}{R}\right)$$

Entonces:

$$\Rightarrow\ E = \frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}^2 + \frac{\ell^2}{2mR^2}\left(1 + 2\frac{\varepsilon}{R}\right) + \frac{aR^{n+1}}{n+1}\left(1 + (n+1)\frac{\varepsilon}{R}\right)$$

Agrupamos términos para separar la parte que depende de la perturbación de las constantes, entonces:

$$\Rightarrow\ E = \frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}^2 + \left(\frac{\ell^2}{mR^3} + aR^n\right)\varepsilon + \frac{\ell^2}{2mR^2} + \frac{aR^{n+1}}{n+1}$$

Ahora, como queremos estudiar el período de la perturbación, debemos encontrar una relación entre ε y t, para lo cual despejamos $\dot{\varepsilon}$ e integramos:

$$\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[\left(E - \frac{\ell^2}{2mR^2} - \frac{aR^{n+1}}{n+1}\right) - \left(\frac{\ell^2}{mR^3} + aR^n\right)\varepsilon\right]}$$

$$\Rightarrow\ dt = \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[\left(E - \frac{\ell^2}{2mR^2} - \frac{aR^{n+1}}{n+1}\right) - \left(\frac{\ell^2}{mR^3} + aR^n\right)\varepsilon\right]}}$$

Asumiendo que la perturbación se comporta de manera armónica, entonces para encontrar el período podemos integrar entre 0 y $\frac{T_{op}}{4}$, donde $\varepsilon(0) = 0$ y $\varepsilon\left(\frac{T_{op}}{4}\right) = \varepsilon_{max}$. Entonces:

$$\Rightarrow \; \frac{T_{op}}{4} = \int_0^{\varepsilon_{max}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[\left(E - \frac{\ell^2}{2mR^2} - \frac{aR^{n+1}}{n+1}\right) - \left(\frac{\ell^2}{mR^3} + aR^n\right)\varepsilon\right]}}$$

Para encontrar ε_{max} usamos la conservación de energía, donde en el punto máximo de la oscilación se cumple que $\dot{\varepsilon} = 0$. Entonces:

$$E = \left(\frac{\ell^2}{mR^3} + aR^n\right)\varepsilon_{max} + \frac{\ell^2}{2mR^2} + \frac{aR^{n+1}}{n+1} \;\Rightarrow\; \varepsilon_{max} = \frac{E - \frac{\ell^2}{2mR^2} - \frac{aR^{n+1}}{n+1}}{\frac{\ell^2}{mR^3} + aR^n}$$

Definiendo las siguientes constantes:

$$A = E - \frac{\ell^2}{2mR^2} - \frac{aR^{n+1}}{n+1} \quad ; \quad B = \frac{\ell^2}{mR^3} + aR^n$$

Se reescribe la expresión para T_{op} como:

$$T_{op} = 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{\frac{A}{B}} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{A - B\varepsilon}}$$

La integral puede calcularse de forma exacta, y entonces:

$$\Rightarrow \; T_{op} = 4\sqrt{\frac{m}{2}} \left[-\frac{2\sqrt{A - B\varepsilon}}{B}\right]\Bigg|_0^{\frac{A}{B}} = 4\sqrt{\frac{m}{2}} \left[0 + 2\frac{\sqrt{A}}{B}\right]$$

Reemplazando las constantes A y B, y desarrollando, se obtiene finalmente:

$$\Rightarrow \; \boxed{T_{op} = 8\frac{\sqrt{\frac{m}{2}\left(E - \frac{\ell^2}{2mR^2} - \frac{aR^{n+1}}{n+1}\right)}}{\frac{\ell^2}{mR^3} + aR^n}}$$