FI3101-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Roberto Gajardo, David Pinto.

Auxiliar 3: Cantidades conservadas.

29 de Septiembre de 2020

P1.- Partícula en una superficie de revolución:

Como tenemos un relación entre la altura y el radio polar, lo más natural es usar coordenadas cilíndricas para la posición y la velocidad de la partícula, entonces:

$$\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{z} \quad ; \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z}$$

Como tenemos la relación $z = z(r)$, entonces usando regla de la cadena:

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial r}\dot{r}$$

Y entonces:

$$\Rightarrow \ \vec{r} = r\hat{r} + z(r)\hat{z} \quad ; \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \frac{\partial z}{\partial r}\dot{r}\hat{z}$$

A partir de la relación para la velocidad $\vec{v}$ es posible calcular la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\dot{r}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \ T = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\right) + r^2\dot{\theta}^2\right]$$

Por otro lado, como sólo la partícula sólo está sometida a la gravedad, entonces la energía potencial es:

$$V = mg(z(r) - z_0)$$

Donde z_0 es tal que $V(z_0) = 0$. Entonces, a partir de estas cantidades escribimos nuestro lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\right) + r^2\dot{\theta}^2\right] - mg(z(r) - z_0) \tag{1}$$

Ahora, viendo nuestro lagrangiano es posible identificar qué cantidades conservadas nos encontraremos. Las más relevantes, o al menos las más comunes, vienen de la *homogeneidad* e *isotropía* del espacio y el tiempo.

Sea $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ el lagrangiano de un sistema mecánico arbitrario, donde q_i hace referencia a las N coordenadas generalizadas del sistema. La derivada total de L con respecto al tiempo es, en virtud de la regla de la cadena:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}$$

La **homogeneidad en el tiempo** nos dice que el lagrangiano no depende explícitamente de t, y entonces $\partial_t L = 0$, con lo cual nuestro resultado anterior es:

$$\Rightarrow \ \frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \right]$$

Ahora, la ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada q_i nos dice que:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

Entonces, reemplazando en la expresión anterior:

$$\Rightarrow \ \frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \right]$$

Podemos notar que el término entre corchetes es una derivada total del tiempo, ya que por regla de la derivada de una multiplicación:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$$

Entonces, reemplazando y reordenando, se tiene que:

$$\Rightarrow \ \frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \right) \ \Rightarrow \ \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L \right) = 0$$

La última expresión nos dice que la cantidad entre paréntesis se conserva durante la evolución temporal de nuestro sistema mecánico. Esta cantidad es la *energía*[1] del sistema:

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L \tag{2}$$

Dado que el lagrangiano (1) que modela nuestro sistema mecánico no depende del tiempo, entonces en este caso la energía se conserva. Como tenemos dos coordenadas generalizadas, entonces:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\dot{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - L = m\dot{r}^2\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 \right) + mr^2\dot{\theta}^2 - \left[\frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 \right) + r^2\dot{\theta}^2 \right] - mg(z(r) - z_0) \right]$$

$$\Rightarrow \ \boxed{E = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 \right) + r^2\dot{\theta}^2 \right] + mg(z(r) - z_0)}$$

Que es la primera cantidad conservada que identificamos en nuestro sistema. Otras cantidades conservadas relevantes son las interpretables a partir de los *momentos generalizados*, que nos entregan información

[1]Más adelante llamaremos *hamiltoniano* a esta expresión, que NO es equivalente a la energía mecánica del sistema.

sobre la *homogeneidad* e *isotropía* del espacio. Recordamos que si una coordenada generalizada q_i no aparece explícitamente en el lagrangiano, entonces $\partial_{q_i} L = 0$, y por Euler-Lagrange:

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i = \text{cte}$$

En nuestro caso tenemos que L no depende explícitamente de θ, por lo tanto el momentum generalizado p_θ asociado a esa coordenada se conserva. Calculando a partir de (1):

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \boxed{p_\theta = mr^2\dot{\theta}}$$

En el caso de coordenadas cilíndricas podemos identificar el momentum generalizado asociado al ángulo como el momento angular.

Para sistemas mecánicos, en general las cantidades conservadas de interés serán la energía y los momentos generalizados, sin embargo en sistemas que tienen asociados otros grados de libertad (no necesariamente de naturaleza mecánica como tal) nos encontraremos con otras cantidades conservadas de significado bastante profundo.

P2.- Cantidades conservadas en sistemas poco comunes:

a) Al observar el lagrangiano podemos notar directamente que este no depende de la posición (al ser una partícula libre) ni del tiempo, por lo tanto el sistema presenta conservación de momentum lineal p_x (asociado a la dirección $\hat{x}$) y energía E, respectivamente. Partiendo por la conservación del momentum, se tiene que:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -\frac{mc^2}{2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}}\left(-\frac{2\dot{x}}{c^2}\right) \Rightarrow p_x = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}}$$

Recordando de física moderna la definición del factor de Lorentz γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}}$$

Se tiene finalmente la siguiente expresión para el momentum lineal conservado p_x:

$$\Rightarrow \boxed{p_x = \gamma m\dot{x}}$$

Que corresponde al mismo resultado usado en el contexto de Física Moderna para la partícula libre en una dimensión, donde el factor de Lorentz ajusta esta cantidad para tomar en cuenta efectos relativistas. Ahora, para calcular E usamos la expresión (2):

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} - L = \frac{m\dot{x}^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}} \Rightarrow E = \gamma\left(m\dot{x}^2 + mc^2\left(1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \gamma mc^2}$$

Que también corresponde al resultado obtenido en el contexto de Física Moderna para la energía de la partícula libre. Vemos de este último resultado que en el caso en reposo ($\gamma = 1$) se obtiene la energía en reposo $E = mc^2$ (en vez de $E = 0$, como sería el caso de una partícula libre sin tomar en cuenta efectos relativistas).

b) Se tiene el lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - q\phi + q\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}$$

Desarrollamos el producto punto escribiendo explícitamente $\vec{A}$ y $\dot{\vec{r}}$ en sus componentes cartesianas:

$$\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}} = A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z}$$

Entonces, reemplazando en el lagrangiano y escribiendo explícitamente la dependencia de ϕ y las componentes de $\vec{A}$ con respecto a y y z, se tiene que:

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - q\phi(y,z) + q\left(A_x(y,z)\dot{x} + A_y(y,z)\dot{y} + A_z(y,z)\dot{z}\right) \tag{3}$$

Primero que todo notamos que este lagrangiano no depende explícitamente de la coordenada x, por lo tanto el momentum generalizado p_x asociado a esta coordenada se conserva. Calculamos este momentum:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Rightarrow \boxed{p_x = m\dot{x} + qA_x}$$

Notamos que este momentum conservado es la suma del momentum lineal "mecánico" $m\dot{x}$, más un aporte qA_x que viene desde el campo electromagnético. Este ejemplo sirve para entender que este momentum generalizado NO es siempre el momentum mecánico, aún en sistemas relativamente simples. La presencia de un campo electromagnético añade un término al momentum, el cual es literalmente el momentum de los campos[2], y la conservación de esta componente p_x nos dice que el campo nos transmite momentum directamente, y viceversa.

Ahora, notamos que el lagrangiano (3) no depende explícitamente del tiempo, por lo tanto la energía definida en (2) se conserva. Calculamos esta cantidad (ignorando por ahora la dependencia explícita en y y z):

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\dot{z} - L$$

$$\Rightarrow \; E = m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + q\left(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z}\right) - L$$

$$\Rightarrow \; \boxed{E = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + q\phi}$$

Esta expresión en general se escribe en función de los momentos generalizados p_x, p_y y p_z (a pesar de que estos dos últimos no se conserven), lo cual tiene conveniencia en el contexto, por ejemplo, de Mecánica Cuántica, donde esta energía (hamiltoniano) nos permite entender los efectos de un campo electromagnético en los electrones de un átomo. Los momentos generalizados p_y y p_z se obtienen de forma análoga a como se obtuvo p_x, y entonces:

$$\Rightarrow \; p_y = m\dot{y} + qA_y \quad ; \quad p_z = m\dot{z} + qA_z$$

Despejamos las velocidades a partir de estos momentos y elevamos al cuadrado, y entonces:

$$\Rightarrow \; \dot{x}^2 = \frac{1}{m^2}\left(p_x - qA_x\right)^2 \quad ; \quad \dot{y} = \frac{1}{m^2}\left(p_y - qA_y\right)^2 \quad ; \quad \dot{z} = \frac{1}{m^2}\left(p_z - qA_z\right)^2$$

Entonces, reemplazando en la expresión encontrada para E:

$$\Rightarrow \; E = \frac{1}{2m}\left(\left(p_x - qA_x\right)^2 + \left(p_y - qA_y\right)^2 + \left(p_z - qA_z\right)^2\right) + q\phi$$

$$\Rightarrow \; E = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 + q\phi$$

Que corresponde a la expresión para la energía de una partícula de masa m y carga q que pueden encontrar en los libros.

[2]Esto se verá en su curso de Electrodinámica, que es muy bello c:

P3.- **Resorte esférico:**

a) Usando coordenadas esféricas, ya que el radio del aro y su velocidad angular con respecto a $\hat{z}$ (vertical) son constantes, entonces al igual que en la pregunta 1 de la tarea 3, la única coordenada generalizada será el ángulo cenital θ. La velocidad en este caso es:

$$\vec{v} = R\Omega \sin(\theta)\hat{\phi} + R\dot{\theta}\hat{\theta}$$

Y entonces, la energía cinética T estará dada por:

$$T = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2\sin^2(\theta)\right)$$

Ahora, para la energía potencial sólo tenemos la energía potencial elástica. En este caso el estiramiento del resorte consiste en el arco de circunferencia que ha recorrido el anillo desde el punto más bajo del aro, y entonces la energía potencial es:

$$U = \frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

Con estas dos cantidades podemos encontrar el lagrangiano $L = T - U$:

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2\sin^2(\theta)\right) - \frac{1}{2}kR^2\theta^2}$$

Como sólo existe una coordenada generalizada, y como esta aparece explícitamente en el lagrangiano, entonces no se conserva momentum de ninguna naturaleza (ni lineal ni angular), sin embargo, como L no depende explícitamente del tiempo, la energía E se conserva. Calculando con la expresión (2) se tiene que:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - L = mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2 + \Omega^2\sin^2(\theta)\right) + \frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\theta}^2 - \Omega^2\sin^2(\theta)\right) + \frac{1}{2}kR^2\theta^2}$$

b) Para estudiar los puntos de equilibrio del sistema necesitamos la ecuación de movimiento, para lo cual usamos Euler-Lagrange. Derivando L con respecto a θ:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2\Omega^2\sin(\theta)\cos(\theta) - kR^2\theta$$

Derivando con respecto a $\dot{\theta}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mR^2\ddot{\theta}$$

Entonces, juntando nuestros resultados encontramos la ecuación de movimiento del anillo:

$$mR^2\ddot{\theta} - mR^2\Omega^2\sin(\theta)\cos(\theta + kR^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow\; \ddot{\theta} - \Omega^2\sin(\theta)\cos(\theta) + \frac{k}{m}\theta = 0 \tag{4}$$

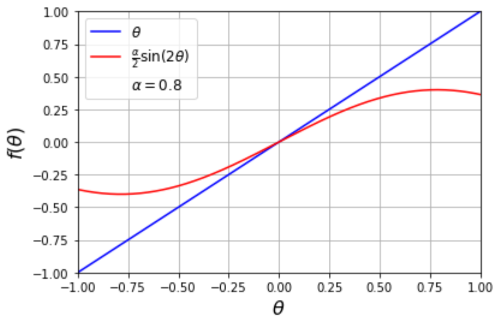
Para encontrar los puntos de equilibrio tenemos que imponer $\ddot{\theta} = 0$, entonces:

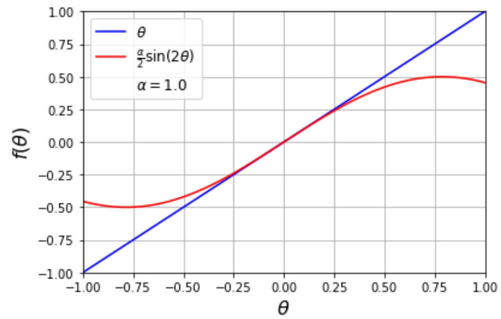
$$\ddot{\theta} = 0 \ \Rightarrow \ -\Omega^2 \sin(\theta)\cos(\theta) + \frac{k}{m}\theta = 0 \ \Rightarrow \ \theta = \frac{m\Omega^2}{k}\sin(\theta)\cos(\theta)$$

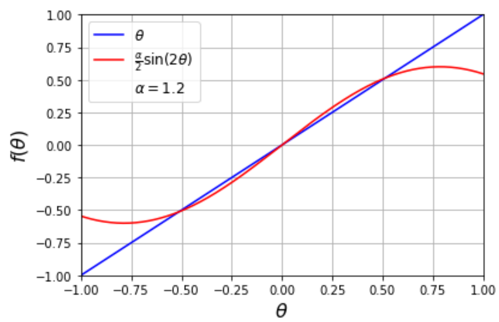
Identificando el parámetro α, y usando la identidad trigonométrica $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$, se tiene que los puntos de equilibrio θ_* cumplen:

$$\theta_* = \frac{\alpha}{2}\sin(2\theta_*) \tag{5}$$

Primero que todo, notamos que esta expresión se cumple directamente para $\theta_* = 0$, por lo tanto $\theta = 0$ es un punto de equilibrio. Para las otras soluciones podemos graficar ambos lados de la igualdad y encontrar las intersecciones entre ambas funciones, que corresponden a puntos que solucionan la ecuación y que entonces son puntos de equilibrio. En los siguientes gráficos se muestra la intersección para distintos valores de α:







Podemos notar que luego de cierto valor de α (aparentemente $\alpha = 1$) aparecen nuevas intersecciones, y por lo tanto nuevos puntos de equilibrio. Esto es interesante, puesto que es una evidencia del cambio cualitativo del sistema al variar $\alpha = \frac{m\Omega^2}{k}$. Para entender la estabilidad de los puntos de equilibrio podemos usar el *método de perturbaciones*, el cual consiste en hacer la transformación $\theta \to \theta(t) + \varepsilon\eta(t)$, con $\varepsilon \ll 1$. A partir de esto se tiene que $\dot{\theta} \to \dot{\theta} + \varepsilon\dot{\eta}$ y $\ddot{\theta} \to \ddot{\theta} + \varepsilon\ddot{\eta}$, y entonces reemplazando en la ecuación de movimiento:

$$\Rightarrow \ \ddot{\theta} + \varepsilon\ddot{\eta} - \Omega^2 \sin(\theta + \varepsilon\eta)\cos(\theta + \varepsilon\eta) + \frac{k}{m}(\theta + \varepsilon\eta) = 0$$

Usando la expresión para la el seno y coseno de una suma, y usando las aproximaciones para ángulos pequeños, se tiene que:

$$\sin(\theta + \varepsilon\eta) = \sin(\theta)\cos(\varepsilon\eta) + \sin(\varepsilon\eta)\cos(\theta) \approx \sin(\theta) + \varepsilon\eta\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta + \varepsilon\eta) = \cos(\theta)\cos(\varepsilon\eta) - \sin(\varepsilon\eta)\sin(\theta) \approx \cos(\theta) - \varepsilon\eta\sin(\theta)$$
$$\Rightarrow\ \sin(\theta + \varepsilon\eta)\cos(\theta + \varepsilon\eta) \approx \sin(\theta)\cos(\theta) + \varepsilon\eta(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$$
$$\Rightarrow\ \sin(\theta + \varepsilon\eta)\cos(\theta + \varepsilon\eta) \approx \sin(\theta)\cos(\theta) + \varepsilon\eta\cos(2\theta)$$

Donde en la última expresión se ignoraron los términos asociados a ε^2. Reemplazando en la ecuación de movimiento perturbada y reordenando, se tiene que:

$$\Rightarrow\ \ddot{\theta} + \varepsilon\ddot{\eta} - \Omega^2\sin(\theta)\cos(\theta) - \Omega^2\varepsilon\eta\cos(2\theta) + \frac{k}{m}(\theta + \varepsilon\eta) = 0$$
$$\Rightarrow\ \ddot{\theta} - \Omega^2\sin(\theta)\cos(\theta) + \frac{k}{m}\theta + \varepsilon\left(\ddot{\eta} - \Omega^2\eta\cos(2\theta) + \frac{k}{m}\eta\right) = 0$$

Notamos que la primera parte de la expresión anterior debe ser cero en virtud de la ecuación de movimiento (4), por otro lado, como ε es pequeño, pero distinto de cero, podemos asegurar que el término entre paréntesis es nulo, entonces:

$$\Rightarrow\ \ddot{\eta} - \Omega^2\eta\cos(2\theta) + \frac{k}{m}\eta = 0$$

Esta expresión es bastante conveniente, ya que nos entrega una ecuación diferencial que da cuenta del comportamiento de una perturbación en torno a un punto de equilibrio (el cual debemos reemplazar en las partes donde aparezca θ). En particular, si tomamos el punto de equilibrio $\theta = 0$ entonces de la expresión anterior:

$$\Rightarrow\ \ddot{\eta} + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right)\eta = 0$$

El comportamiento de las soluciones de esta ecuación diferencial es bien conocido. Si el término entre paréntesis es mayor a cero, entonces las soluciones (es decir, la perturbación) oscilan, y por lo tanto el punto de equilibrio asociado (en este caso $\theta = 0$) sería **estable**. En el caso contrario, si el término entre paréntesis es menor a cero, entonces las soluciones (la perturbación) crecen exponencialmente en el tiempo, con lo cual el punto de equilibrio asociado es **inestable**. En resumen, para que $\theta = 0$ sea un punto de equilibrio estable es necesario que se cumpla la condición:

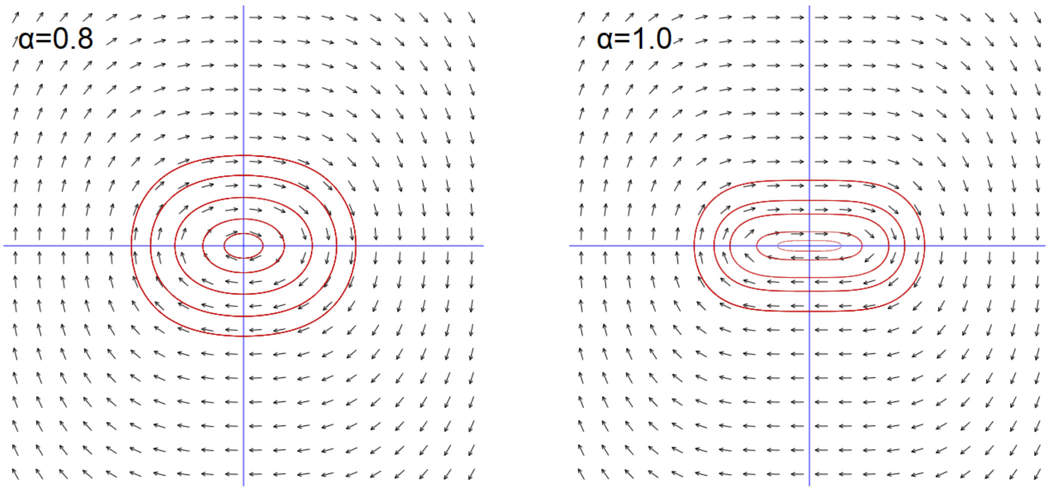
$$\frac{k}{m} - \Omega^2 \geq 0$$

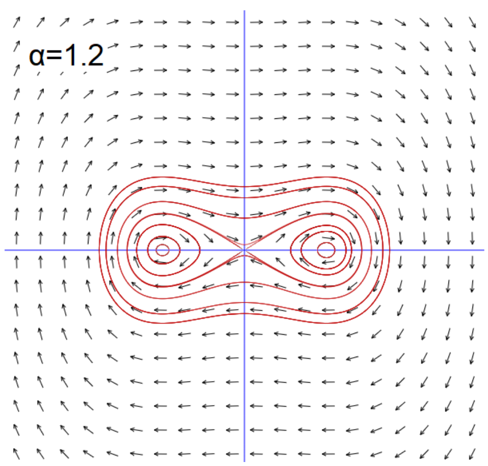
Podemos escribir esta condición en función del parámetro adimensional α:

$$\frac{k}{m} - \Omega^2 \geq 0\ \Rightarrow\ \frac{\Omega^2 m}{k} \leq 1\ \Rightarrow\ \alpha \leq 1$$

Entonces, para valores de α entre 0 (definido positivo) y 1, el punto de equilibrio $\theta = 0$ es estable, mientras que para valores de α mayores a 1, se vuelve un equilibrio intestable. Esto es un resultado bastante interesante si lo complementamos con la intersección de curvas obtenida anteriormente. Podemos ver que el límite que separa la estabilidad de $\theta = 0$ coincide con el límite que separa la existencia de un punto de equilibrio con la existencia de tres puntos de equilibrio.

Con esto ya podemos hacernos una idea bastante completa de la dinámica de este sistema; nuestro sistema tiene un punto de equilibrio $\theta = 0$ permanente, el cual es estable para $\alpha \leq 1$. En $\alpha = 1$ ocurre una *bifurcación*, el punto de equilibrio $\theta = 0$ pasa a ser inestable, y en el sistema aparecen dos nuevos puntos de equilibrio estables. Para esta última afirmación nos podemos apoyar en el espacio de fase, el cual se muestra a continuación para $\alpha = 0{,}8$, $\alpha = 1$ y $\alpha = 1{,}2$:





Podemos notar directamente en el caso $\alpha = 1{,}2$ que $\theta = 0$ pasa a ser un punto de equilibrio inestable, mientras que aparecen dos puntos de equilibrio estables simétricos.

Como no podemos conocer analíticamente el valor de estos puntos de equilibrio (porque vienen de la ecuación trascendente[3] (5)) no podemos bosquejar de forma exacta el diagrama de bifurcación, sin embargo la evidencia presentada hasta ahora es más que suficiente para caracterizar la dinámica cualitativa del sistema.

[3] https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_trascendente