FI3101-1 Mecánica Clásica.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Roberto Gajardo, David Pinto.

Mini tutorial pplane.

26 de Septiembre de 2020

Pplane[1] es una página que nos permite construir espacios de fase para sistemas de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, es decir, sistemas descritos por las ecuaciones:

$$x' = f(x, y) \quad ; \quad y' = g(x, y)$$

Ahora, la ecuación de movimiento de un sistema mecánico consiste en una ecuación diferencial de segundo orden en el tiempo, la cual podemos[2] reducir a un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Supongamos que un sistema mecánico con coordenada generalizada q está modelado por la ecuación de movimiento $\ddot{q} = h(q, \dot{q})$. Haciendo los cambios de variable $x = q$ e $y = \dot{q}$, se tiene que:

$$x' = \dot{q} \quad ; \quad y' = \ddot{q} = h(q, \dot{q})$$

Reemplazando los cambios de variable:

$$\Rightarrow \boxed{x' = y \quad ; \quad y' = h(x, y)}$$

Con lo cual tendríamos nuestro input para pplane. Como ejemplo tomemos el péndulo simple con disipación, el cual está modelado por la siguiente ecuación de movimiento:

$$\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) = 0$$

Donde ν es el coeficiente de roce viscoso, y ω es la frecuencia de oscilación. Haciendo el cambio de variable $x = \theta$ e $y = \dot{\theta}$, se tiene que:

$$x' = \dot{\theta} \quad ; \quad y' = \ddot{\theta}$$

A partir de la ecuación de movimiento se tiene que:

$$\Rightarrow \; x' = \dot{\theta} \quad ; \quad y' = -\nu\dot{\theta} - \omega^2 \sin(\theta)$$

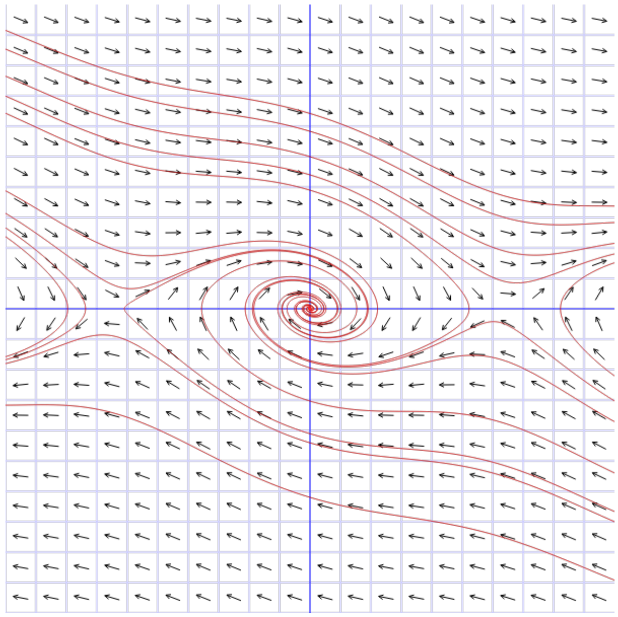
Y entonces, reemplazando el cambio de variable, se obtiene el input para pplane:

$$\Rightarrow \; x' = y \quad ; \quad y' = -\nu y - \omega^2 \sin(x)$$

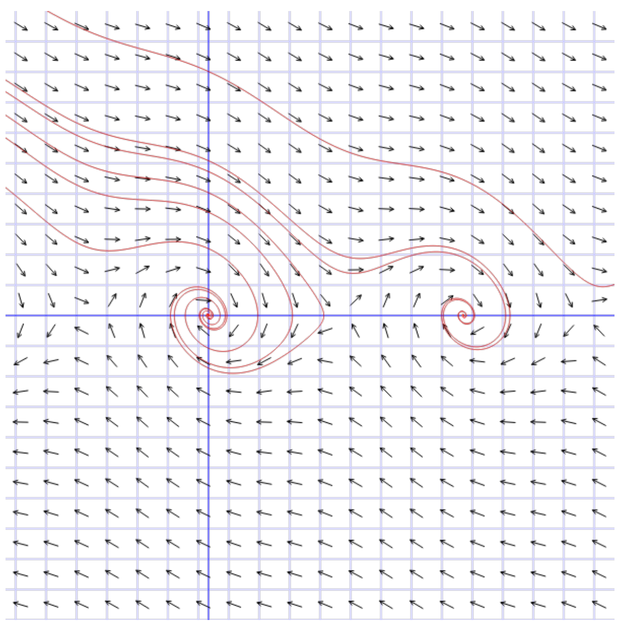
[1] https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html

[2] https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_ecuaciones_diferenciales#Reducci%C3%B3n_a_un_sistema_de_primer_orden

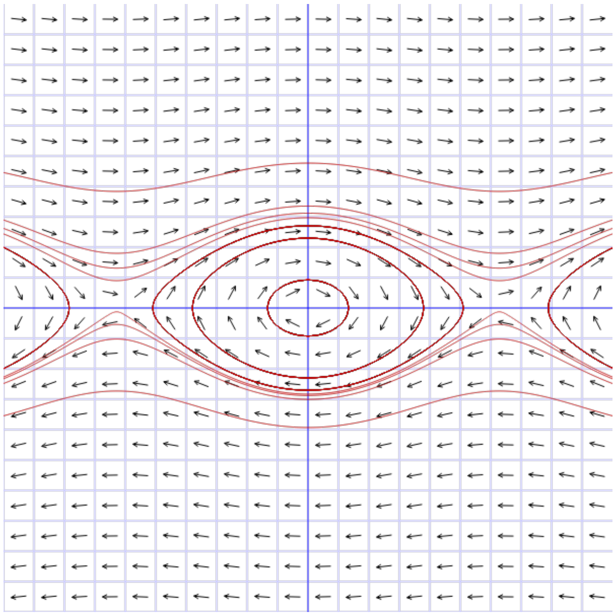
Reemplazando en pplane se obtiene el siguiente resultado para $\nu = 0{,}3$ y $\omega^2 = 0{,}5$:



Para obtener las curvas rojas basta con hacer click sobre el gráfico. Podemos notar que se obtiene el mismo resultado que se vio en clases; el péndulo disipa energía y entonces sigue una trayectoria que termina en un punto tal que $\dot{\theta} = 0$ (es decir, el péndulo se detiene). Se puede pensar que hay algunas trayectorias que escapan, sin embargo estas sólo corresponden a trayectorias donde el péndulo alcanza a dar alguna vuelta completa, pero luego se detiene producto de la disipación en un punto a una distancia 2π en el espacio de fase, tal como se puede apreciar en el siguiente gráfico:



Ahora, para un péndulo sin disipación ($\nu = 0$) con la misma frecuencia angular, se tiene que:



Que también coincide con lo visto en clases.

Pplane tiene la opción de definir los límites de los ejes, cambiar la cantidad y el tamaño de las flechas, y puede descargarse la imagen directamente haciendo click derecho sobre el gráfico.